APUNTES DE
ECUACIONES DIFERENCIALES

CARRERA:

INGENIERÍA EN COMPUTACIÓN

CLAVE:

20141271

NOMBRE DEL BECARIO PIFI:

FIGUEROA PALMA DANIEL

DIRECTOR:

DÍAZ ALBARRÁN SALVADOR FELIPE

ÍNDICE

UNIDAD 1

INTRODUCCION

1.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES Y TERMINOLOGIA

Una definición poco formal de una ecuación diferencial sería la siguiente: llamamos ecuación diferencial a cualquier ecuación en la que aparecen relacionados:

a) Una o más variables independientes.

b) Una variable independiente de ella o ellas.

c) Las derivadas de esta última con respecto a una o más variables independientes.

Estrictamente hablando para definir formalmente el concepto de ecuaciones diferenciales necesitamos de conocimientos de variable compleja por tal motivo nos conformaremos con la definición anterior.

1.2 CLASIFICACION DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1.2.1 ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Aparece cuando la función incógnita solo depende de una variable dependiente. Se puede representar de dos maneras:

a) $F[x, y(x), y'(x),..., y^{(n)}(x)]$. Se dice que es una ecuación en forma explícita, es decir, donde no aparece despejada la derivada de mayor orden $y^{(n)}(x)$.

b) $y^{(n)} = f[x, y(x), y'(x),..., y^{(n-1)}(x)]$. Ecuación diferencial en forma normal donde aparece despejada la derivada de mayor orden.

Ejercicio1

Las siguientes ecuaciones diferenciales están expresadas en forma explicita

$$a) \quad x^2 y'' - 3xy = 0,$$
$$b) \quad y''' + 4x^2 y' + 5y \cos x = 0,$$

y en forma normal, las ecuaciones

$$c) \quad -y'' = 4xy + senx,$$
$$d) \quad -y''' = -6xy'' - \cos x,$$

1.2.2 ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

Son aquellas donde la incógnita depende de dos o más variables independientes.

En este caso aparecen derivadas parciales, como por ejemplo.

$$\text{a)}\ \frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x}+\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}=0\,,$$

$$\text{b)}\ \frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial x}=-z\,.$$

1.2.3 DEFINICION DE ORDEN

Se llama orden de una ecuación diferencial al orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.

1.2.4 DEFINICION DE GRADO.

Se llama grado de una ecuación diferencial al exponente si es un número natural al que esta elevado la derivada de mayor orden. Si el exponente no es un número natural entonces no podemos definir el grado.

Ejemplo

Indicar su forma, orden y grado de las ecuaciones diferenciales siguientes.

$$\text{a)}\ x^2 y'' + 2xy' + 2x = 0\,,$$

Segundo orden, Grado 1, Forma explicita

$$\text{b)}\ y''' = 3y'' - sen(x-1)\,,$$

Tercer orden, Grado 1, Forma normal

$$\text{c)}\ y''^2 = 4x(1-y'^2)^6\,,$$

Segundo orden, Grado 2, Forma explicita

$$\text{d)}\ y'''^3 = \cos x + ye^x\,.$$

Tercer orden, Grado 3, Forma explicita

1.2.5 ECUACION DIFERENCIAL LINEAL

Una ecuación diferencial lineal ordinaria de orden *n* es una ecuación en la que la *n*-ésima derivada es una función lineal de las demás derivadas y de la propia función, es decir, es de la forma

$$a_n(x)\frac{d^n(y)}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}(y)}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=b(x).$$

Donde $a_i,(i=0,\ldots,n)$ son funciones de *x*.

NOTA

En una ecuación lineal de orden n solo puede aparecer la primera potencia de las variables y, así como sus derivadas no pueden aparecer productos de dicha variable con sus derivadas entre si, ni funciones trascendentes de y ni sus derivadas. Si se diera este caso, entonces la ecuación diferencial no es lineal.

Ejercicio2

Indicar si las siguientes ecuaciones diferenciales son lineales o no

$$\text{a)}\ \frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y=0,$$

$$\text{b)}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+5y\frac{dy}{dx}+6y^2=0,$$

$$\text{c)}\ x\tan y+y'=x+\cos x.$$

Solución

$$\text{a)}\quad \frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y=0,\quad \text{Es lineal}$$

$$\text{b)}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+5y\frac{dy}{dx}+6y^2=0,\ \text{No es lineal}$$

$$\text{c)}\quad x\tan y+y'=x+\cos x,\quad \text{No es lineal}$$

1.2.5.1 DEFINICION DE SOLUCION

Llamamos solución de una ecuación diferencial ordinaria a toda función $y = f(x)$ que satisface la ecuación.

Ejercicio3

a) Probar que $y = senx$ ***, es solución de la ecuación diferencial*** $y'' + y = 0$.

b) Probar que $y = Ce^x$ ***, es una solución de la ecuación diferencial*** $y' - y = 0$ ***donde C es una constante***

c)Probar que

$$y = \left(\frac{2}{3}x + C\right)^{3/2}$$

es una solución de la ecuación diferencial $y' = y^{1/3}$ ***, donde C es una constante***

Solución

a) $y' = \cos x, \quad y'' = -senx,$

sustituyendo en la ecuación diferencial $y'' + y = 0$, tenemos

$$-senx + senx = 0,$$

b) $y = Ce^x \Rightarrow y' = Ce^x$**,**

sustituyendo en la ecuación $y' - y = 0$, tenemos

$$Ce^x - Ce^x = 0,$$

$$y' = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x + C\right)^{3/2-1} \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}x\right)$$

c) $y' = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}x + C\right)^{1/2}\left(\frac{2}{3}\right)$

$$y' = \left(\frac{2}{3}x + C\right)^{1/2}.$$

sustituyendo

$$\left(\frac{2}{3}x + C\right)^{1/2} = \left[\left(\frac{2}{3}x + C\right)^{3/2}\right]^{1/3}$$

$$\left(\frac{2}{3}x + C\right)^{1/2} = \left(\frac{2}{3}x + C\right)^{1/2}.$$

1.3 ECUACIONES DIFERENCIALES COMO EXPRESIONES DE MODELOS MATEMATICOS

Con frecuencia se desea describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno de la vida real en términos matemáticos; tal sistema puede ser físico, químico, social, psicológico, económico, etc. La descripción matemática de un sistema se llama modelo matemático algunos ejemplos son los siguientes:

Ejercicio4

Describir un modelo para la mezcla de dos soluciones salinas de distintas concentraciones

Solución

Supongamos que un tanque mezclador grande contiene 300 galones de agua, en donde se ha disuelto sal. Otra solución salina se bombea al tanque a razón de 3 galones por minuto. El contenido se agita y es desalojado a la misma razón. Si la concentración de la solución que entra es 2 libras/galón necesitamos formar un modelo de la cantidad de sal en el tanque en cualquier momento.

Sea $A(t)$ la cantidad de sal en libras en el tanque en cualquier momento t. En este caso, la rapidez con que cambia $A(t)$ es la razón neta

$$\frac{dA}{dt} = \begin{pmatrix} \text{tasa de entrada} \\ \text{de la sustancia} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{tasa de salida} \\ \text{de la sustancia} \end{pmatrix} = R_1 - R_2 .$$

Por otro lado, la razón R_1 , con que entra la sal al tanque en lb/min, es

$$R_1 = (3\ gal / min)(2\ lb / gal) = 6\ lb / min ,$$

Mientras que la razón R_2 con que la sal sale del tanque es

$$R_2 = (3\ gal / min)\left(\frac{A}{300}\ lb / gal\right) = \frac{A}{100}\ lb / min .$$

Entonces tenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dA}{dt} = 6 - \frac{A}{100} .$$

Esta expresión será nuestro modelo matemático para el mezclado de dos soluciones salinas.

Ejercicio5

Describir un modelo de la caída libre

Solución

Supongamos ahora que se arroja una piedra hacia arriba, desde la azotea de un edificio ver figura 1

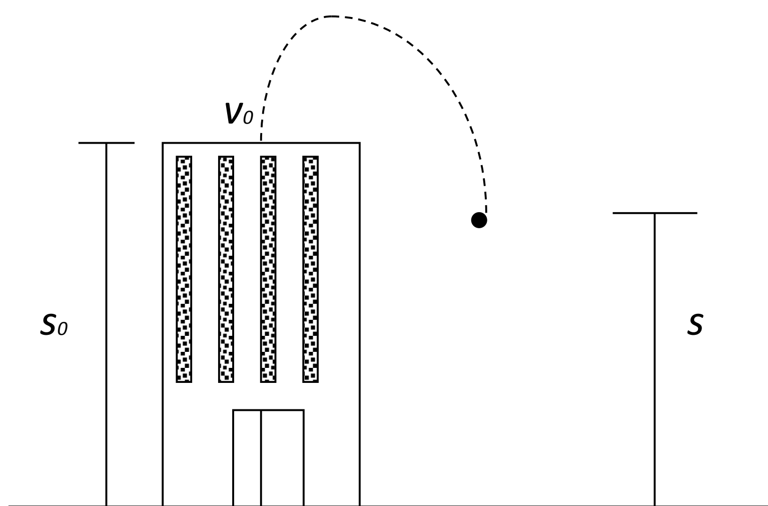


Figura 1. Caída libre de una piedra desde un edificio

Nos preguntamos ¿cuál será su posición en el momento *t*? Consideremos que su posición respecto al suelo es *s*. La aceleración de la piedra en función de la posición es

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2}.$$

Si suponemos que la dirección hacia arriba es positiva, la masa de la piedra es *m* y despreciando otras fuerzas actuando sobre la piedra, la segunda ley de Newton establece que

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \quad \text{o} \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = -g,$$

donde *g* es la aceleración de la gravedad y *mg* el peso de la piedra. Si la altura del edificio es s_0 y la velocidad inicial de la piedra es v_0, la posición de la piedra en el instante *t* queda determinada mediante el problema de valor inicial

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g, \quad s(0) = s_0,\ s'(0) = v_0.$$

UNIDAD 2

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

2.1 INTRODUCCION

Las ecuaciones diferenciales de primer orden, son aquellas en las que aparecen relacionadas la variable independiente x, la dependiente o función incógnita $y(x)$ y su primera derivada $y'(x)$. Una ecuación de este tipo puede representarse de diversas maneras:

a) *Forma normal*: $y'(x) = f\left[x, y(x)\right]$,

b) *Forma implícita*: $F\left[x, y(x), y'(x)\right] = 0$,

c) *Forma diferencial*: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

Ejercicio6

La ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ viene dada en forma normal, donde

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x-y}.$$

Para obtener la forma implícita solo pasamos todos los términos a un solo miembro

$$(x-y)\frac{dy}{dx} - (x^2+y^2) = 0,$$

y la forma diferencial asociada a esta ecuación es

$$(x-y)dy - (x^2+y^2)dx = 0,$$

donde $M(x,y) = (x-y)$ y $N(x,y) = (x^2+y^2)$,

2.2 ECUACIONES DEL TIPO $y' = f(x)$

Método de solución

Si la ecuación diferencial esta expresada en la forma $y' = f(x)$, la transformamos en

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Luego "despejamos" dy: $dy = f(x)dx$,

posteriormente integramos cada miembro de la igualdad

$$\int dy = \int f(x)dx \Rightarrow y = \int f(x)dx + c \quad . \qquad (2.1)$$

Nota: Como se trata de ecuaciones sencillas que se resuelven por integración directa podemos aplicar este método de solución a ecuaciones de segundo, tercer, etc, orden, es decir, a las ecuaciones $y^{(n)} = f(x)$ **.**

Ejercicio7

Resolver la ecuacióndiferencial

$$y' = \cos 3x + 5 .$$

Solución

$$y' = \cos 3x + 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \cos 3x + 5 \Rightarrow dy = (\cos 3x + 5)dx ,$$

$$\int dy = \int (\cos 3x + 5)dx \quad \Rightarrow \quad y = \int \cos 3x dx + \int 5dx = \frac{sen 3x}{3} + 5x + c ,$$

Ejercicio8

Resolver la ecuacióndiferencial

$$y'' = e^x .$$

Solución

Esta ecuación puede resolver como la primera como sigue

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x \quad \Rightarrow \quad dy^2 = e^x dx^2 \quad \Rightarrow \quad \int dy^2 = \int e^x dx^2 \quad \Rightarrow \quad dy = e^x + c_1 ,$$

Volviendo a integrar

$$\int dy = \int (e^x + c_1)dx \quad \Rightarrow \quad y = e^x + c_1 x + c_2 .$$

2.3 ECUACIONES DE VARIABLES SEPARABLES

Las ecuaciones de variables separables se representan como

$$F(x)G(y)dx + H(x)P(y)dy = 0 .$$

La característica de estas ecuaciones es que tanto la variable independiente como la dependiente se pueden separar. El proceso de solución es el siguiente: En primer lugar dividimos la ecuación por el producto $G(y)H(x)$

$$\frac{F(x)G(y)}{H(x)G(y)}dx = -\frac{H(x)P(y)}{G(y)H(x)}dy ,$$

Después simplificamos $\frac{F(x)}{H(x)}dx = -\frac{P(y)}{G(y)}dy$,e integrando cada miembro

$$\int \frac{F(x)}{H(x)}dx = -\int \frac{P(y)}{G(y)}dy\,,$$

La solución general es

$$f(x) + p(x) = c\,. \qquad (2.2)$$

Ejercicio9

Resolver la ecuacióndiferencial

$$(1+e^x)yy' = e^x\,.$$

Solución

$$(1+e^x)yy' = e^x \quad \Rightarrow \quad (1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x \quad \Rightarrow \quad (1+e^x)ydy = e^x dx\,,$$

En este caso $G(y)H(x) = 1\cdot(1+e^x)$, dividiendo

$$\frac{(1+e^x)y}{(1+e^x)}dy = \frac{e^x}{(1+e^x)}dx \quad \Rightarrow \quad ydy = \frac{e^x}{(1+e^x)}dx\,,$$

Integrando ambos miembros

$$\int ydy = \int \frac{e^x}{(1+e^x)}dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \ln(1+e^x) + c \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2(\ln(1+e^x) + c)\,,$$

Finalmente $\quad y = \sqrt{2\ln(1+e^x) + c}\,.$

Ejercicio10

Resolver la ecuacióndiferencial

$$(1-y^2)dx + 2xydy = 0\,.$$

Solución

Dividimos entre $(1-y^2)x$

$$\frac{(1-y^2)dx}{(1-y^2)x} + \frac{2xydy}{(1-y^2)x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} + \frac{2ydy}{(1-y^2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{2ydy}{(1-y^2)} = -\int \frac{dx}{x},$$

resolviendo las integrales por cambio de variable

$$-\ln(1-y^2) = -\ln x + c, \quad \Rightarrow \quad \ln(1-y^2) = \ln x + c,$$

aplicando la función exponencial para despejar a *y*, tenemos

$$e^{\ln(1-y^2)} = e^{\ln x + c} \quad \Rightarrow \quad 1 - y^2 = e^{\ln x} e^c \Rightarrow$$
$$-y^2 = xK - 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = -xK + 1 \quad \Rightarrow$$
$$y = \sqrt{1 - xK}.$$

Ejercicio11

Resolver la ecuacióndiferencial

$$(e^{2y} - y)\cos x \frac{dy}{dx} = e^y sen2x\,.$$

Sujeta a la condición inicial $y(0) = 0$.

Solución

Transformando la ecuación a la forma diferencial

$$(e^{2y} - y)\cos x dy = e^y sen2x dx\,.$$

Dividiendo entre $(\cos x)e^y$ e integrando

$$\frac{(e^{2y} - y)\cos x dy}{(\cos x)e^y} = \frac{e^y sen2x dx}{(\cos x)e^y} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{2y} - y}{e^y} dy = \frac{sen2x}{\cos x} dx,$$
$$\int \frac{e^{2y} - y}{e^y} dy = \int \frac{sen2x}{\cos x} dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{e^{2y}}{e^y} dy - \int \frac{y}{e^y} dy = \int \frac{sen2x}{\cos x} dx,$$
$$\int e^y dy - \int y e^{-y} dy = \int \frac{2senx\cos x}{\cos x} dx\,,$$
$$e^y + e^{-y} + ye^{-y} = -2\cos x + c\,.$$

La primera integral es inmediata, la segunda integral se resuelve por integración por partes y en la integral trigonométrica usamos la identidad $sen2x = 2senx\cos x$. Aplicando las condiciones iniciales $y(0) = 0$ obtenemos la constante c

$$e^0 + e^{-0} + 0e^{-0} = -2\cos 0 + c \quad \Rightarrow \quad 1 + 1 = -2 + c \quad \Rightarrow \quad c = 4,$$
$$\therefore\; e^y + e^{-y} + ye^{-y} = -2\cos x + 4.$$

2.4 ECUACIONES HOMOGENEAS Y REDUCIBLES A ESTAS

Este tipo de ecuaciones pueden reducirse a las ecuaciones separables por medio de un cambio de variable, pero antes definamos una función homogénea.

DEFINICION 2.1 FUNCION HOMOGENEA

Una función $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es homogénea de grado r si

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \,, \quad \text{para todo } \lambda \in R \tag{2.3}$$

Ejercicio12

Verificar si las siguientes funciones son homogéneas y en caso afirmativo indicar el grado

1) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$.

2) $f(x, y) = x^2 + y$.

3) $f(x, y) = (x + y)^{1/2}$.

Solución

1) $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 - \lambda x \lambda y = \lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 - \lambda^2 xy = \lambda^2 (x^2 + y^2 - xy) = \lambda^2 f(x, y)$.

La función es homogénea de grado 2.

2) $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + \lambda y = \lambda^2 x^2 + \lambda y \neq \lambda^r f(x, y)$, no es homogénea

3) $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x + \lambda y)^{1/2} = (\lambda\{x + y\})^{1/2} = \lambda^{1/2} (x + y)^{1/2} = \lambda^{1/2} f(x, y)$, es homogénea de grado ½.

Ejercicio13

Verificar si las siguientes funciones son homogéneas y en caso afirmativo indicar el grado

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$.

b) $f(x, y) = x^2 + y$.

c) $f(x, y) = (x + y)^{1/2}$.

Solución

$a)\quad f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2+(\lambda y)^2-(\lambda x)(\lambda y),$

$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2x^2+\lambda^2y^2-\lambda^2xy,\qquad \Rightarrow$ homogénea de grado 2

$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2(x^2+y^2-xy).$

$b)\quad f(x,y)=x^2+y,$

$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2+\lambda y,\ \Rightarrow$ No es homogénea

$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda(\lambda x^2+y).$

$c)\quad f(x,y)=(x+y)^{1/2},$

$f(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x+\lambda y)^{1/2},$

$f(\lambda x,\lambda y)=[\lambda(x+y)]^{1/2},\qquad \Rightarrow$ Es homogénea de grado $\frac{1}{2}$

$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{1/2}(x+y)^{1/2}.$

DEFINICION 2.2 ECUACION HOMOGENEA

Una ecuación diferencial de primer orden, expresada en forma diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es homogénea si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son homogéneas de igual grado.

PROPOSICION

Dada una ecuación diferencial $y'=f(x,y)$, se dice que es una ecuación homogénea si la función $f(x,y)$ es homogénea de grado cero.

Resolución de una ecuación homogénea

Si $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, es una ecuación homogénea, el cambio de variable $y=ux$ la transforma a una ecuación de variables separables en *u* y *x*, es decir $dy=udx+xdu$ y sustituyendo en la ecuación $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, implica

$$M(x,ux)dx+N(x,ux)(udx+xdu)=0,$$
$$x^rM(1,u)dx+x^rN(1,u)(udx+xdu)=0,$$
$$[M(1,u)+uN(1,u)]dx+xN(1,u)du=0.$$

Esta expresión tiene la forma de una ecuación de variables separables y puede resolverse por el método anterior.

Ejercicio14

Resolver la ecuacióndiferencial

$$(x^2-3y^2)dx+2xydy=0.$$

Solución

Verifiquemos que la ecuación sea homogénea, usando la definición con $M(x,y)=x^2-3y^2$ y $N(x,y)=2xy$

$$M(\lambda x,\lambda y)=(\lambda x)^2-3(\lambda y)^2=\lambda^2x^2-3\lambda^2y^2=\lambda^2(x^2-3y^2)=\lambda^2M(x,y),$$

$$N(\lambda x,\lambda y)=2\lambda x\lambda y=\lambda^2 2xy=\lambda^2N(x,y).$$

Como M y N son homogéneos del mismo grado entonces la ecuación diferencial es homogénea. Para resolver usemos el cambio de variable $y=ux \Rightarrow dy=udx+xdu$ y sustituyendo en la ecuación, tenemos

$$\left(x^2-3\{ux\}^2\right)dx+2x(ux)(udx+xdu)=0, \text{ factorizando } x^2:$$

$$x^2\left(1-3u^2\right)dx+2x^2u(udx+xdu)=0, \text{ dividiendo entre } x^2:$$

$$\left(1-3u^2\right)dx+2u(udx+xdu)=0,$$

$$\left(1-3u^2+2u^2\right)dx+2uxdu=0,$$

$$\left(1-u^2\right)dx+2uxdu=0,$$

esta es una <u>ecuación de variables separables</u>, dividiendo entre $(1-u^2)x$:

$$\frac{dx}{x}+\frac{2u}{(1-u^2)}du=0, \text{ integrando}$$

$\int\frac{dx}{x}=-\int\frac{2u}{(1-u^2)}du \quad\Rightarrow\quad \ln x=\ln(1-u^2)+c \quad\Rightarrow\quad x=(1-u^2)k$, donde $k=e^c$, en este parte deshacemos el cambio $y=ux$ despejando a u: $u=y/x \quad\Rightarrow$

$x=(1-u^2)k \quad\Rightarrow\quad x=(1-y^2/x^2)k \quad\Rightarrow\quad kx^3=x^2-y^2 \quad\Rightarrow\quad y^2=x^2-kx^3.$

Ejercicio15

Resolver la ecuacióndiferencial

$$(x^2+y^2)dx+(x^2-xy)dy=0.$$

Solución

Verifiquemos si es homogénea

$$M(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2x^2+\lambda^2y^2=\lambda^2(x^2+y^2),$$

$$N(\lambda x,\lambda y)=\lambda x^2-\lambda x\lambda y=\lambda^2(x^2-xy),$$

Como $M(\lambda x,\lambda y)$ y $N(\lambda x,\lambda y)$ son homogéneas de grado dos concluimos que la ecuación diferencial es homogénea. Usando el cambio de variable $y=ux \Rightarrow dy=udx+xdu$

$$(x^2+u^2x^2)dx+(x^2-x^2u)(udx+xdu)=0,$$
$$x^2(1+u^2)dx+x^2(1-u)udx+x^2(1-u)xdu=0,$$
$$x^2(1+u^2)dx+x^2(u-u^2)dx+x^3(1-u)du=0,$$
$$x^2(1+u^2+u-u^2)dx+x^3(1-u)du=0,$$
$$x^2(1+u)dx+x^3(1-u)du=0.$$

Dividiendo entre $x^3(1+u)$

$$\frac{x^2(1+u)dx}{x^3(1+u)}+\frac{x^3(1-u)du}{x^3(1+u)}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dx}{x}+\frac{1-u}{1+u}du=0,$$

$$\frac{1-u}{1+u}du=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{1-u}{1+u}du=-\int\frac{dx}{x},$$

efectuando el cociente $\frac{1-u}{1+u}\Rightarrow 1-u=-1+\frac{2}{1+u}$,

$$-\int du+2\int\frac{1}{1+u}du=-\int\frac{dx}{x}\Rightarrow -u+2\ln(1+u)=-\ln x+C,$$

Deshaciendo el cambio $u=\frac{y}{x}$

$$-\frac{y}{x}+2\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)=-\ln x+C.$$

Ejercicio16

Resolver la ecuacióndiferencial

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4y-3x}{2x-y}.$$

Solución

Transformemos la ecuación dada a su forma diferencial

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4y-3x}{2x-y}\Rightarrow(2x-y)dy-(4y-3x)dx=0.$$

Suponiendo que esta ecuación ya es homogénea realicemos el cambio de variable

$$y=ux\Rightarrow dy=udx+xdu,$$

sustituyendo estos cambios tenemos

$$(2x-y)dy-(4y-3x)dx=0\Rightarrow(2x-ux)(udx+xdu)-(4ux-3x)dx=0,$$

simplificando $\quad 2xudx+2x^2du-u^2xdx-ux^2du-4uxdx+3xdx=0,$

$$x\left(2u-u^2-4u+3\right)dx+x^2\left(2-u\right)du=0\ ,$$

dividiendo entre *x*, $\left(-u^2-2u+3\right)dx+x\left(2-u\right)du=0$,

separando variables $x\left(2-u\right)du=-\left(-u^2-2u+3\right)dx=\left(u^2+2u-3\right)dx$,

$$\frac{2-u}{u^2+2u-3}du=\frac{1}{x}dx\,,$$

$$\int\frac{2-u}{u^2+2u-3}du=\int\frac{1}{x}dx\,,$$

para resolver la integral podemos usar fracciones parciales:

$$\frac{2-u}{u^2+2u-3}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+3}\ ,$$

$$\frac{2-u}{\left(u-1\right)\left(u+3\right)}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u+3}\,,$$

$$2-u=A\left(u+3\right)+B\left(u-1\right),$$

$$2-u=\left(A+B\right)u+3A-B\,,$$

de aquí tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases}A+B=-1,\\3A-B=2,\end{cases}$$

Resolviéndolo por adición, tenemos que $A=\frac{1}{4}$ y $B=-\frac{5}{4}$, sustituyendo estos valores

$$\frac{2-u}{u^2+2u-3}=\frac{1}{4(u-1)}-\frac{5}{4(u+3)}\,,$$

así que

$$\int\frac{2-u}{u^2+2u-3}du=\int\frac{1}{x}dx\Rightarrow\frac{1}{4}\int\frac{1}{u-1}du-\frac{5}{4}\int\frac{1}{u+3}du=ln\,x\,,$$

$$\frac{1}{4}ln\left(u-1\right)-\frac{5}{4}ln\left(u+3\right)=ln\,x+c\,,$$

como $u=\frac{y}{x}$, entonces

$$\frac{1}{4}ln\left(\frac{y}{x}-1\right)-\frac{5}{4}ln\left(\frac{y}{x}+3\right)=ln\,x+c\,,$$

$$\frac{1}{4}ln\left(\frac{y-x}{x}\right)-\frac{5}{4}ln\left(\frac{y+3x}{x}\right)=ln\,x+c\,.$$

Las ecuaciones diferenciales que no son homogéneas pero que se pueden reducir a ellas son de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right).$$

Para convertirla en una ecuación homogénea, necesitamos que la función sea homogénea de grado cero, para ello, consideremos las rectas de ecuaciones: $ax+by+c=0$ y $a'x+b'y+c'=0$, tenemos dos casos:

Caso A: Las rectas se cortan en el punto (x_0, y_0). En este caso realizamos el cambio de variable

$$x = X + x_0,$$
$$y = Y + y_0,$$

la ecuación resultante de este cambio es

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX+bY}{a'X+b'Y}\right). \tag{2.4}$$

Al final se deshacen los cambios de variable.

Caso B: Las rectas son paralelas. Esto es, $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \lambda$,

la ecuación que resulta de este cambio es de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c}\right) = f\left(\frac{ax+by+c}{a\lambda x+b\lambda y+c'}\right) = g(ax+by),$$

Ecuación que podemos transformar en una ecuación de variables separables mediante el cambio

$$u = ax+by. \tag{2.5}$$

Ejercicio17

Resolver la ecuacióndiferencial

$$(x+y-2)dx + (x-y+4)dy = 0.$$

Solución

Esta ecuación puede reducirse a una homogénea. Tomamos las rectas $x+y-2$ y $x-y+4$. Verifiquemos si las rectas se cortan o son paralelas. Como las rectas se cortan en $(x_0, y_0) =$ $(-1,3)$, usamos el cambio:

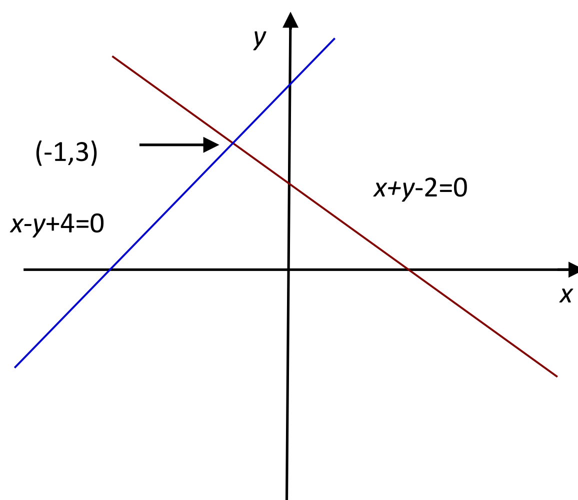
$$x = X-1 \quad \Rightarrow \quad dx = dX,$$
$$y = Y+3 \quad \Rightarrow \quad dy = dY,$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial, tenemos

$$(X-1+Y+3-2)dX + (X-1-Y-3+4)dY = 0,$$
$$(X+Y)dX + (X-Y)dY = 0, \tag{2.6}$$

esta ecuación es homogénea en *X*, *Y*. Ahora la resolvemos como una ecuación homogénea, con el cambio de variable $Y = uX \quad \Rightarrow \quad dY = udX + Xdu$, sustituyendo en (2.6)

$$(X + uX)dX + (X - uX)(udX + Xdu) = 0,$$



$$X(1+u)dX + X(1-u)(udX + Xdu) = 0,$$

$$X(1+u)dX + X(1-u)udX + X(1-u)Xdu = 0,$$

$$X(1+u+u-u^2)dX + X(1-u)Xdu = 0,$$

$$X(1+2u-u^2)dX + X^2(1-u)du = 0,$$

$$(1+2u-u^2)dX + X(1-u)du = 0,$$

obtenemos una ecuación de variables separables. Dividiendo entre $X(1+2u-u^2)$:

$$\frac{dX}{X} = \frac{1-u}{1+2u-u^2}du \text{ ,integrando:}$$

$$\int \frac{dX}{X} = \int \frac{1-u}{1+2u-u^2}du \rightarrow \ln X = 1/2 \ln\left|1+2u-u^2\right| + c,$$

$$\exp\{\ln X\} = \exp\{1/2 \ln\left|1+2u-u^2\right| + c\} \rightarrow X = (1+2u-u^2)^{1/2}k,$$

deshaciendo los cambios realizados

$$u = \frac{Y}{X}, \quad X = x+1, \quad Y = y-3,$$

$$x+1=\left(1+2\frac{Y}{X}-\left(\frac{Y}{X}\right)^2\right)^{1/2}k \Rightarrow x+1=\left(1+2\frac{y-3}{x+1}-\left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2\right)^{1/2}k \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k}(x+1)^2=1+2\frac{y-3}{x+1}-\left(\frac{y-3}{x+1}\right)^2.$$

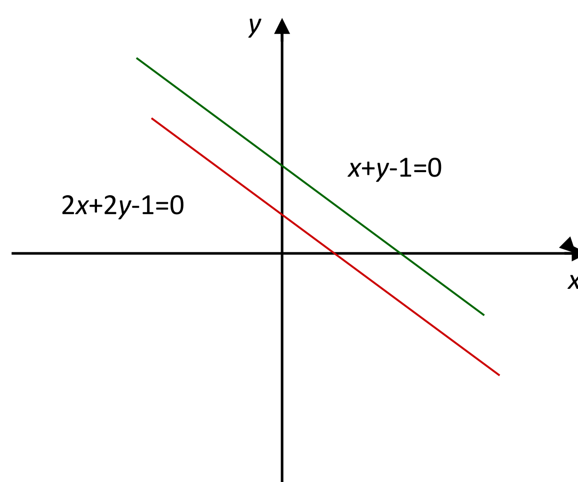
Ejercicio18

Resolver la ecuacióndiferencial

$$(x+y-1)dx+(2x+2y-1)dy=0.$$

Solución

Verifiquemos si las rectas se cortan o son paralelas



El cambio de variable adecuado es $u=x+y$ o $u=2x+2y$. Consideremos $u=x+y$, implica que $y=u-x$, $du=dx+dy$, la ecuación se transforma en

$$(x+y-1)dx+(2x+2y-1)dy=0 \quad \Rightarrow \quad (x+u-x-1)dx+(2x+2u-2x-1)(du-dx)=0,$$

$$(u-1)dx+(2u-1)(du-dx)=0,$$

$$udx-dx+2udu-du-2udx+dx=0,$$

$(2u-1)du-udx=0$, ecuación de variables separables.

dividiendo entre u: $\frac{(2u-1)du}{u}-\frac{udx}{u}=0 \quad \Rightarrow \quad (2-\frac{1}{u})du=dx$, integrando:

$\int(2-\frac{1}{u})du=\int dx \quad \Rightarrow \quad 2u-\ln u=x+c$, deshaciendo el cambio $u=x+y$,

$$2u-\ln u=x+c \quad \Rightarrow \quad 2(x+y)-\ln(x+y)=x+c.$$

2.5 ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS Y REDUCIBLES A EXACTAS MEDIANTE EL FACTOR INTEGRANTE

DEFINICION 2.3 ECUACION EXACTA

Una ecuación diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ es exacta si existe una función $F(x,y)$ tal que $dF=M(x,y)dx+N(x,y)dy$, es decir

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)\,\&\,\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)\ . \tag{2.7}$$

PROPOSICION

La ecuación diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, es exacta si y solo si

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2.8}$$

donde M y N son funciones continuas.

Método de solución

El procedimiento de solución consiste en utilizar cualquiera de las dos expresiones de (2.7) para determinar la función F. Utilicemos la primera igualdad

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y),\text{ despejando } \partial F \text{ tenemos: } \partial F=M(x,y)\partial x\ ,$$

como vamos a integrar respecto a x (una variable) podemos transformar la expresión anterior a la forma

$$dF=M(x,y)dx\rightarrow\int dF=\int M(x,y)dx,$$

$$F=\int M(x,y)dx+c(y)\ , \tag{2.9}$$

donde la función $c(y)$ debe ser determinada. Para ello usamos la siguiente igualdad de (2.9) de la siguiente manera

$$\frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)\text{,sustituyendo } F \text{ tenemos: } \frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx+c(y)\right]=N(x,y)\text{,o bien como}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]+\frac{dc(y)}{dy}=N(x,y),$$

despejemos ahora $c(y)$

$$\frac{dc(y)}{dy}=N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]\to dc(y)=\left\{N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]\right\}dy\,,$$

integrando

$$\int dc(y)dc=\int\left\{N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]\right\}dy\to c(y)=\int\left\{N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]\right\}dy\,,$$

Así que de (1)

$$F=\int M(x,y)dx+\int\left\{N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)dx\right]\right\}dy\,. \qquad (2.10)$$

Ejercicio19

Resolver la ecuacióndiferencial

$$\left(3x^2+4xy\right)dx+\left(2x^2+2y\right)dy=0$$

Solución

Verifiquemos primero que la ecuación es exacta, es decir que satisface la igualdad

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\,,$$

en efecto,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\left(3x^2+4xy\right)}{\partial y}=4x\;\&\;\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial\left(2x^2+2y\right)}{\partial x}=4x\,,$$

el método nos dice que existe una función F tal que

$$F=\left(3x^2+4xy\right)dx+\left(2x^2+2y\right)dy\,,$$

es decir

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2+4xy\;\&\;\frac{\partial F}{\partial y}=2x^2+2y\,,$$

ahora escojamos cualquiera de las dos igualdades, por ejemplo usemos la primera

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2+4xy\,,$$

despejando F obtenemos

$$dF=\left(3x^2+4xy\right)dx\to\int dF=\int\left(3x^2+4xy\right)dx\,,$$

$$F=x^3+2x^2y+c(y),$$

determinemos $c(y)$ por medio de la expresión

$\frac{\partial F}{\partial y}=2x^2+2y$, sustituyendo F en ella obtenemos

$$\frac{\partial\left(x^3+2x^2y+c(y)\right)}{\partial y}=2x^2+2y \to 2x^2+\frac{dc(y)}{dy}=2x^2+2y,$$

$$\frac{dc(y)}{dy}=2x^2+2y-2x^2 \to \frac{dc(y)}{dy}=2y \to dc(y)=2ydy,$$

$$\int dc(y)=\int 2ydy \to c(y)=y^2+c.$$

aquí c es una constante. Finalmente la solución de nuestra ecuación es $F=x^3+2x^2y+y^2+c$.

Ejercicio20

Resolver la ecuacióndiferencial

$$\left(y\cos x+2xe^y\right)dx+\left(senx+x^2e^y-1\right)dy=0.$$

Solución

Verifiquemos primero que la ecuación es exacta, es decir que satisface la igualdad

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x},$$

en efecto,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\left(y\cos x+2xe^y\right)}{\partial y}=\cos x+2xe^y \;\&\; \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial\left(senx+x^2e^y-1\right)}{\partial x}=\cos x+2xe^y,$$

así que

$$F=\left(y\cos x+2xe^y\right)dx+\left(senx+x^2e^y-1\right)dy,$$

es decir

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y\cos x+2xe^y \;\&\; \frac{\partial F}{\partial y}=senx+x^2e^y-1,$$

integrando la primera igualdad

$$dF=\left(y\cos x+2xe^y\right)dx \Rightarrow \int dF=\int\left(y\cos x+2xe^y\right)dx,$$

$$F=ysenx+x^2e^y+c(y),$$

usando la segunda igualdad

$$\frac{d\left(ysenx+x^2e^y+c(y)\right)}{dy}=senx+x^2e^y-1 \to senx+x^2e^y+c'(y)=senx+x^2e^y-1,$$

$c'(y)=-1 \Rightarrow c(y)=-y+c$,la solución final será: $F=ysenx+x^2e^y-y+c$.

Ejercicio21

Resolver la ecuacióndiferencial

$$dx+\left(\frac{x}{y}-seny\right)dy=0\,.$$

Solución

Verifiquemos primero que la ecuación es exacta, es decir que satisface la igualdad

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}=0\ \&\ \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{x}{y}-seny\right)}{\partial x}=\frac{1}{y}\,,$$

claramente la ecuación no es exacta. Para que sea exacta evaluamos los cocientes

$$\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{N}=\frac{0-\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}-seny}=-\frac{1}{x-yseny}\ \&\ \frac{\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}}{M}=\frac{\frac{1}{y}}{1}=\frac{1}{y}\,,\qquad(2.11)$$

la expresión (2.11) solo depende de una variable (*y)* por lo tanto nos quedamos con ella. Encontremos ahora el factor de integración $\mu(y)$ mediante la expresión

$$\frac{d\mu}{dy}=\frac{\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}}{M}\mu\,,$$

o bien $\frac{d\mu}{dy}=\frac{1}{y}\mu$, separando variables $\frac{d\mu}{\mu}=\frac{dy}{y}$, integrando

$$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int\frac{dy}{y}\rightarrow ln\,\mu=ln\,y\text{ ,despejando }\mu:\ e^{ln\,\mu}=e^{ln\,y}\rightarrow\mu=y\,,$$

multiplicando la ecuación original por el valor de μ

$$ydx+y\left(\frac{x}{y}-seny\right)dy=0\Rightarrow ydx+(x-yseny)dy=0\,,$$

verificando que sea exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1\ \&\ \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial(x-yseny)}{\partial x}=1\,,$$

la ecuación ya es exacta. Resolviéndola como tal tenemos

$$F=ydx+(x-yseny)dy\,,$$

es decir

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y\ \&\ \frac{\partial F}{\partial y}=x-yseny\,,$$

usando la primera igualdad

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y\Rightarrow dF=ydx\Rightarrow\int dF=\int ydx\,,$$

$$F = yx + c(y),$$

sustituyendo en la segunda igualdad

$$\frac{d(xy + c(y))}{dy} = x - yseny \to x + c'(y) = x - yseny \text{ , determinando } c(y):$$

$\int c'(y) = -\int ysenydy$, (integrando por partes): $c(y) = y\cos y - seny + c$,

finalmente la solución será

$$F = yx + y\cos y - seny + c .$$

Ejercicio22

Resolver la ecuacióndiferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 , \quad y(1) = 1 .$$

Solución

Transformemos la ecuación diferencial a su forma diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \Rightarrow (3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 ,$$

Verifiquemos primero que la ecuación es exacta, es decir que satisface la igualdad

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y \ \& \ \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y ,$$

no son exactas. Evaluemos los cocientes

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}}{M} = \frac{2x + y - (3x + 2y)}{3xy + y^2} = \frac{-x - y}{3xy + y^2},$$

Entonces usemos el primer cociente para determinar a $\mu(x)$ mediante la expresión

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N}\mu \to \frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{x}\mu \text{ ,separando variables } \frac{d\mu}{\mu} = \frac{dx}{x} \text{ ,integrando:}$$

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{dx}{x} \to \ln \mu = \ln x \to \mu = x ,$$

este factor se multiplica por la ecuación diferencial

$$x(3xy + y^2)dx + x(x^2 + xy)dy = 0 ,$$

comprobando que sea exacta tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2xy \ \& \ \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2xy \text{ ,entonces: } F = (3x^2y + xy^2)dx + (x^3 + x^2y)dy ,$$

es decir

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 y + xy^2 \,\&\, \frac{\partial F}{\partial y} = x^3 + x^2 y\,,$$

usando la primera igualdad

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 y + xy^2 \Rightarrow dF = \left(3x^2 y + xy^2\right)dx \Rightarrow \int dF = \int \left(3x^2 y + xy^2\right)dx\,,$$

$$F = x^3 y + \frac{1}{2}x^2 y^2 + c(y),$$

para determinar $c(y)$ usemos la segunda igualdad

$$\frac{d\left(x^3 y + \frac{1}{2}x^2 y^2 + c(y)\right)}{dy} = x^3 + x^2 y \to x^3 + x^2 y + c'(y) = x^3 + x^2 y \Rightarrow c'(y) = 0\,,$$

integrando respecto a y: $c(y) = c$,entonces

$$F = x^3 y + \frac{1}{2}x^2 y^2 + c\,,$$

determinemos la constante c mediante la condición inicial $y(1) = 1$

$$0 = 1^3 1 + \frac{1}{2}1^2 1^2 + c \Rightarrow c = -\frac{1}{3}, \text{la solución final será: } F = x^3 y + \frac{1}{2}x^2 y^2 - \frac{1}{3}.$$

2.6 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Las Ecuaciones lineales que estudiaremos son de la forma

a) $\dfrac{dy}{dx} + ay = g(x)$, a es una constante (2.12)

b) $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$. (2.13)

Deduciremos el método de solución para las ecuaciones de la forma del a) para la otra es muy similar.

Método de solución

Consideremos la ecuación

$$\frac{dy}{dx} + ay = g(x).$$

El primer paso es multiplicar esta ecuación por la función $\mu(x)$ denominado factor integrante todavía indeterminada

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)ay = \mu(x)g(x), \tag{2.14}$$

por otro lado observemos que

$$\frac{d\mu(x)y}{dx}=\mu(x)\frac{dy}{dx}+y\frac{d\mu(x)}{dx}, \tag{2.15}$$

igualando el ultimo termino de esta expresión con el segundo termino de 3 tenemos que

$y\frac{d\mu(x)}{dx}=\mu(x)ay$,eliminando y: $\frac{d\mu(x)}{dx}=\mu(x)a$,

ahora solo basta resolver la ecuación de variables separables $\frac{d\mu(x)}{\mu(x)}=adx$,

$\int\frac{d\mu(x)}{\mu(x)}=a\int dx\Rightarrow ln\,\mu(x)=ax$,despejando $\mu(x)$:

$$e^{ln\,\mu(x)}=e^{ax}\Rightarrow\mu(x)=e^{ax},$$

sustituyendo en (2.15) tenemos

$$e^{ax}\frac{dy}{dx}+e^{ax}ay=e^{ax}g(x),$$

factorizando en forma de derivada los dos primeros términos, obtenemos

$$\frac{d\left(e^{ax}y\right)}{dx}=e^{ax}g(x),$$

dado que $e^{ax}\frac{dy}{dx}+e^{ax}ay=\frac{d\left(e^{ax}y\right)}{dx}$,el paso que sigue es resolver la ecuación diferencial para *y:*

$$\frac{d\left(e^{ax}y\right)}{dx}=e^{ax}g(x)\Rightarrow d\left(e^{ax}y\right)=e^{ax}g(x)dx,$$

integrando y despejando *y*

$$\int d\left(e^{ax}y\right)=\int e^{ax}g(x)dx\rightarrow y=e^{-ax}\int e^{ax}g(x)dx+ce^{-ax}\ . \tag{2.16}$$

la ecuación (2.16) es la solución de la ecuación original.

Ejercicio23

Resolver la ecuacióndiferencial

$$\frac{dy}{dx}-2y=4-x.$$

Solución

Para encontrar al factor integrante $\mu(x)$ podemos usar la ecuación $\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu(x)a$,en nuestro caso $a = -2$, entonces: $\frac{d\mu(x)}{dx} = -2\mu(x)$,separando variables y resolviendo la ecuación, tenemos $\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = -2dx$,

$$\int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = -2\int dx \Rightarrow ln\,\mu(x) = -2x \to \mu(x) = e^{-2x},$$

multiplicando la ecuación original por este factor, obtenemos

$$e^{-2x}\frac{dy}{dx} - 2e^{-2x}y = (4-x)e^{-2x},$$

factorizando como una derivada

$$\left(e^{-2x}y\right)' = 4e^{-2x} - xe^{-2x}$$,integrando:

$$\int d\left(e^{-2x}y\right) = \int\left(4e^{-2x} - xe^{-2x}\right)dx \to e^{-2x}y = -2e^{-2x} + \frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2t} + c,$$

despejando y

$$y = -2e^{-2x}e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{-2x}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}e^{2x} + ce^{2x},$$

la solución de la ecuación será

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}x + ce^{2x}.$$

Ejercicio24

Resolver la ecuacióndiferencial

$$\frac{dy}{dx} - y = 2xe^{2x}, \quad y(0) = 1.$$

Solución

Para encontrar al factor integrante $\mu(x)$ podemos usar la ecuación

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = a\mu(x), \text{ es decir: } \frac{d\mu(x)}{dx} = -\mu(x),$$

$$\int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = -\int dx \Rightarrow ln\,\mu(x) = -x \to \mu(x) = e^{-x},$$

multiplicando la ecuación original por este factor, obtenemos

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x}y = 2xe^{2x}e^{-x}$$,factorizando como una derivada

$$\left(e^{-x}y\right)' = 2xe^{x} \text{,integrando: } \int d\left(e^{-x}y\right) = 2\int xe^{x}dx\,,$$
$$e^{-x}y = 2xe^{x} - 2e^{x} + c \rightarrow y = 2xe^{2x} - ce^{x} - 2e^{2x}\,,$$

para determinar c utilicemos la condición inicial $y(0) = 1$,

$$1 = -c - 2 \Rightarrow c = -3,\ \text{así que: } y = 2xe^{2x} + 3e^{x} - 2e^{2x}\,.$$

Ejercicio25

Resolver la ecuacióndiferencial

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^{2}\,,\qquad y(1) = 2\,.$$

Solución

Primero arreglemos la ecuación de la siguiente manera

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^{2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 4x\,,$$

El factor integrante $\mu(x)$ puede encontrarse usando la ecuación

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = p(x)\mu(x) \text{,e}$$

en este caso $p(x) = \frac{2}{x}$ y tenemos

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = \frac{2}{x}\mu(x)\,,$$

separando variables: $\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \frac{2}{x}dx \Rightarrow \int\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \int\frac{2}{x}dx \Rightarrow$

$$ln\,\mu(x) = 2\,ln\,x = ln\,x^{2} \rightarrow \mu(x) = x^{2}\,,$$

multiplicando la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 4x$ por el factor integrante obtenemos

$$x^{2}\frac{dy}{dx} + x^{2}\frac{2}{x}y = 4xx^{2} \Rightarrow x^{2}\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x^{3}\,,$$

y factorizando $\left(x^{2}y\right)' = 4x^{3}$,integrando: $\int d\left(x^{2}y\right) = \int 4x^{3}dx \rightarrow x^{2}y = x^{4} + c \rightarrow$

$y = x^{2} + cx^{-2}$,y de la condición inicial $y(1) = 2$, tenemos

$$2 = 1 + c,\quad \Rightarrow\quad c = 1 \text{,la solución será } y = x^{2} + x^{-2}\,.$$

Ejercicio26

Resolver la ecuacióndiferencial

$$x\frac{dy}{dx}+2y=x^2-x+1.$$

Solución

Primero arreglemos la ecuación de la siguiente manera

$$x\frac{dy}{dx}+2y=x^2-x+1\Rightarrow\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x+\frac{1}{x}-1,$$

entonces $p(x)=\frac{2}{x}$, así que de la ecuación $\frac{d\mu(x)}{dx}=p(x)\mu(x)$ y del ejercicio anterior tenemos $\mu(x)=x^2$,multiplicando la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=x+\frac{1}{x}-1$ por el factor integrante obtenemos

$$x^2\frac{dy}{dx}+x^2\frac{2}{x}y=x^2x+x^2\frac{1}{x}-x^2\Rightarrow x^2\frac{dy}{dx}+2xy=x^3+x-x^2,$$

factorizando

$$\left(x^2y\right)'=x^3-x^2+x\rightarrow\int d(x^2y)=\int\left(x^3-x^2+x\right)dx\rightarrow x^2y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c,$$

$$y=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{3}+cx^{-2}+\frac{1}{2}.$$

2.7 ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES A LINEALES

Existen ecuaciones diferenciales que son no lineales pero pueden transformarse mediante uno o más cambios de variables a ecuaciones lineales. Nuestro estudio se restringirá a las ecuaciones diferenciales no lineales de:

i) Bernoulli, *ii)* Ricatti, *iii)* Clairaut

2.7.1 ECUACIONES DIFERENCIALES DE BERNOULLI

Las ecuaciones de Bernoulli son de la forma

$$y'+p(x)y=g(x)y^n,\quad n\neq 0,1 \tag{2.17}$$

ellas pueden resolverse mediante el cambio de variable $u=y^{1-n}$ reduciéndolas a ecuaciones lineales.

Ejercicio27

Resolver la ecuacióndiferencial

$$x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{y^3}.$$

Solución

Transformamos primero la ecuación a la forma $y'+p(x)y=g(x)y^n$ de la siguiente manera

$$x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{y^3}\Rightarrow\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}y^{-3}\ , \qquad (2.18)$$

en este caso $n=-3$, aplicando el cambio de variable $u=y^{1-n}$ tenemos

$$u=y^{1-n}\Rightarrow u=y^{1-(-3)}=y^4\Rightarrow y=u^{1/4}\Rightarrow dy=\frac{1}{4}u^{-3/4}du\ ,$$

sustituyendo estos cambios en la ecuación (2.18), tenemos

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}y^{-3}\Rightarrow\frac{1}{4}u^{-3/4}\frac{du}{dx}+\frac{u^{1/4}}{x}=\frac{1}{x}u^{-3/4}\ ,$$

multiplicando por $4u^{3/4}$, implica

$$4u^{3/4}\frac{1}{4}u^{-3/4}\frac{du}{dx}+4u^{3/4}\frac{u^{1/4}}{x}=\frac{1}{x}4u^{3/4}u^{-3/4}\Rightarrow\frac{du}{dx}+4\frac{u}{x}=\frac{4}{x}\rightarrow\underline{\text{ecuación lineal}}$$

aquí $p(x)=\frac{4}{x}$ y de la ecuación $\frac{d\mu(x)}{dx}=p(x)\mu(x)$, tenemos

$$\int\frac{d\mu(x)}{\mu(x)}=\int\frac{4}{x}dx\Rightarrow ln\,\mu(x)=4\,ln\,x=ln\,x^4\Rightarrow\mu(x)=x^4\ ,$$

multiplicando la ecuación $\frac{du}{dx}+4\frac{u}{x}=\frac{4}{x}$ por $\mu(x)=x^4$, obtenemos

$$\frac{du}{dx}+4\frac{u}{x}=\frac{4}{x}\Rightarrow x^4\frac{du}{dx}+4x^4\frac{u}{x}=x^4\frac{4}{x}\Rightarrow x^4\frac{du}{dx}+4x^3u=4x^3\ ,$$

$$\left(x^4u\right)'=4x^3\rightarrow\int d(x^4u)=4\int x^3dx\rightarrow x^4u=x^4+c\rightarrow u=1+x^{-4}c\ ,$$

pero $u=y^4$, entonces: $y^4=1+x^{-4}c$.

Ejercicio28

Resolver la ecuacióndiferencial

$$\frac{dy}{dx}-y=e^xy^2.$$

Solución

En este ejercicio $n=2$, por lo tanto $u=y^{1-n}\Rightarrow u=y^{1-2}=y^{-1}\Rightarrow y=u^{-1}$,

$$dy = -u^{-2}du$$

entonces $$\frac{dy}{dx} - y = e^x y^2 \Rightarrow -u^{-2}\frac{du}{dx} - u^{-1} = e^x u^{-2},$$

multiplicando por $-u^2$, tenemos

$$-u^{-2}\left(-u^2\right)\frac{du}{dx} - \left(-u^2\right)u^{-1} = -e^x u^2 u^{-2} \Rightarrow \frac{du}{dx} + u = -e^x \rightarrow \underline{\textit{ecuación lineal}}$$

ahora bien, en esta ecuación lineal $a = 1$ por consiguiente

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = a\mu(x) \Rightarrow \int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \int dx \Rightarrow \ln \mu(x) = x \Rightarrow \mu(x) = e^x,$$

multiplicando la ecuación $\frac{du}{dx} + u = -e^x$ por $\mu(x) = e^x$, obtenemos: $e^x \frac{du}{dx} + e^x u = -e^x e^x \Rightarrow$

$e^x \frac{du}{dx} + e^x u = -e^{2x}$,factorizando: $\left(e^x u\right)' = -e^{2x}$,integrando $\int d\left(e^x u\right) = -\int e^{2x} dx \Rightarrow$

$e^x u = -\frac{1}{2}e^{2x} + c \Rightarrow u = -\frac{1}{2}e^x + ce^{-x}$,pero $u = y^{-1}$, entonces $\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}e^x + ce^{-x}$.

Ejercicio29

Resolver la ecuacióndiferencial

$$x^2\frac{dy}{dx} + y^2 = xy.$$

Solución

Transformamos primero la ecuación dada a la forma $y' + p(x)y = g(x)y^n$

$$x^2\frac{dy}{dx} + y^2 = xy \Rightarrow x^2\frac{dy}{dx} - xy = -y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}y^2,$$

En este ejercicio $n = 2$, por lo tanto $u = y^{1-n} \Rightarrow u = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow y = u^{-1}$,

$$dy = -u^{-2}du,$$

entonces $$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}y^2 \Rightarrow -u^{-2}\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}u^{-1} = -\frac{1}{x^2}u^{-2},$$

multiplicando por $-u^2$, tenemos

$$-u^{-2}\left(-u^2\right)\frac{du}{dx} - \frac{1}{x}\left(-u^2\right)u^{-1} = -\frac{1}{x^2}\left(-u^2\right)u^{-2} \Rightarrow \frac{du}{dx} + \frac{1}{x}u = \frac{1}{x^2},$$

el factor integrante se puede encontrar de la ecuación

$$\frac{d\mu(x)}{dx} = p(x)\mu(x) \Rightarrow \int \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \int \frac{1}{x}dx \Rightarrow \ln \mu(x) = \ln x \Rightarrow \mu(x) = x,$$

multiplicando la ecuación $\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}u=\frac{1}{x^2}$ por $\mu(x)=x$, obtenemos

$$x\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}xu=\frac{1}{x^2}x \Rightarrow x\frac{du}{dx}+u=\frac{1}{x},$$

luego, $(xu)'=\frac{1}{x}$, integrando $\int d(xu)=\int\frac{1}{x}dx \Rightarrow xu=ln\,x+c \Rightarrow u=\frac{ln\,x}{x}+cx^{-1}$,

o bien como $$\frac{1}{y}=\frac{ln\,x}{x}+cx^{-1}.$$

2.7.2 ECUACIONES DIFERENCIALES DE RICATTI

La ecuación diferencial de Riccati es de la forma

$$y'=p(x)y^2+q(x)y+r(x)=0. \qquad (2.19)$$

tal ecuación puede transformarse en una ecuación diferencial lineal si conocemos una solución particular $y_1=y_1(x)$ de la ecuación de Riccati. Esta solución forma parte de una nueva función desconocida expresada como

$$u=\frac{1}{y-y_1}, \qquad (2.20)$$

o en términos de *y*, tenemos $y=\frac{1}{u}+y_1$, (2.21)

en otras palabras, necesitamos realizar un cambio de variable para encontrar la solución de la ecuación de Riccati.

Ejercicio30

Resolver la ecuacióndiferencial

$$\frac{dy}{dx}-x^2y^2+x^4-1=0.$$

que admite la solución particular $y_1=x$

Solución

Para resolver la ecuación tenemos que diferenciar $y=\frac{1}{u}+y_1=\frac{1}{u}+x$, es decir

$$dy=-u^{-2}du+dy_1=-u^{-2}du+dx,$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación original tenemos

$$\frac{dy}{dx}-x^2y^2+x^4-1=0 \Rightarrow \frac{-u^{-2}du+dx}{dx}-x^2\left(\frac{1}{u}+x\right)^2+x^4-1=0,$$

$$-u^{-2}\frac{du}{dx}+1-x^2\left(\frac{1}{u^2}+\frac{2x}{u}+x^2\right)+x^4-1=0,$$

$$-u^{-2}\frac{du}{dx}-\frac{x^2}{u^2}-\frac{2x^3}{u}-x^4+x^4=0,$$

$$-u^{-2}\frac{du}{dx}-\frac{x^2}{u^2}-\frac{2x^3}{u}=0,$$

multiplicando por $-u^2$, tenemos

$$-u^{-2}\left(-u^2\right)\frac{du}{dx}-\left(-u^2\right)\frac{x^2}{u^2}-\left(-u^2\right)\frac{2x^3}{u}=0\Rightarrow\frac{du}{dx}+x^2+2x^3u=0,$$

$$\frac{du}{dx}+2x^3u=-x^2\rightarrow ecuación\ lineal$$

Calculemos ahora el factor integrante mediante la expresión

$$\int\frac{d\mu(x)}{\mu(x)}=\int 2x^3dx\Rightarrow ln\,\mu(x)=\frac{1}{2}x^4\Rightarrow\mu(x)=e^{x^4/2},$$

multiplicando la ecuación lineal por $\mu(x)=e^{x^4/2}$, obtenemos

$$e^{x^4/2}\frac{du}{dx}+2x^3ue^{x^4/2}=-x^2e^{x^4/2}\Rightarrow\left(e^{x^4/2}u\right)'=-x^2e^{x^4/2},$$

$$\int de^{x^4/2}u=-\int x^2e^{x^4/2}dx,$$

$$e^{x^4/2}u=-\int x^2e^{x^4/2}dx+c\Rightarrow u=-e^{-x^4/2}\int x^2e^{x^4/2}dx+c,$$

pero $u=\frac{1}{y-y_1}=\frac{1}{y-x}$, entonces: $\frac{1}{y-x}=-e^{-x^4/2}\int x^2e^{x^4/2}dx+c$,

$$1=(y-x)\left[-e^{-x^4/2}\int x^2e^{x^4/2}dx+c\right]\Rightarrow\frac{1}{-e^{-x^4/2}\int x^2e^{x^4/2}dx+c}=y-x,$$

$$x-\frac{e^{x^4/2}}{\int x^2e^{x^4/2}dx+c}=y\quad \text{o}\quad y=x-\frac{e^{x^4/2}}{\int x^2e^{x^4/2}dx+c}.$$

Ejercicio31

Resolver la ecuacióndiferencial

$$\frac{dy}{dx}-y^2+\frac{y}{x}+\frac{1}{x^2}=0.$$

que admite la solución particular $y_1=\frac{1}{x}$.

Solución

Para resolver la ecuación tenemos que diferenciar $y=\frac{1}{u}+y_1=\frac{1}{u}+\frac{1}{x}$, es decir

$$dy=-u^{-2}du+dy_1=-u^{-2}du-x^{-2}dx,$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación original tenemos

$$\frac{dy}{dx}-y^2+\frac{y}{x}+\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow\frac{-u^{-2}du-x^{-2}dx}{dx}-\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{x}\right)^2+\frac{\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{x}\right)}{x}+\frac{1}{x^2}=0,$$

$$\frac{-u^{-2}du}{dx}-x^{-2}\frac{dx}{dx}-\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{x}\right)^2+\frac{\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{x}\right)}{x}+\frac{1}{x^2}=0,$$

$$\frac{-u^{-2}du}{dx}-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{1}{u^2}+\frac{2}{ux}+\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}=0,$$

$$\frac{-u^{-2}du}{dx}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{u^2}-\frac{2}{ux}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{ux}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}=0,$$

$\frac{-u^{-2}du}{dx}-\frac{1}{u^2}-\frac{1}{ux}=0$,multiplicando por $-u^2$, tenemos

$$\left(-u^2\right)\frac{-u^{-2}du}{dx}-\left(-u^2\right)\frac{1}{u^2}-\left(-u^2\right)\frac{1}{ux}=0,$$

$$\frac{du}{dx}+1+\frac{u}{x}=0\Rightarrow\frac{du}{dx}+\frac{u}{x}=-1\rightarrow ecuación\ lineal$$

calculando el factor integrante

$$\int\frac{d\mu(x)}{\mu(x)}=\int\frac{1}{x}dx\Rightarrow ln\,\mu(x)=ln\,x\Rightarrow\mu(x)=x,$$

multiplicando la ecuación lineal por $\mu(x)=e^{x^4/2}$, obtenemos

$$x\frac{du}{dx}+x\frac{u}{x}=-x\Rightarrow x\frac{du}{dx}+u=-x\Rightarrow(xu)'=-x,$$

$$\int d(xu)'=-\int xdx\Rightarrow xu=-\frac{1}{2}x^2+c\Rightarrow u=-\frac{1}{2}x+cx^{-1},$$

pero como $u=\frac{1}{y-y_1}=\frac{1}{y-\frac{1}{x}}$, entonces

$$\frac{1}{y-\frac{1}{x}}=-\frac{1}{2}x+cx^{-1}\Rightarrow 1=\left(-\frac{1}{2}x+cx^{-1}\right)\left(y-\frac{1}{x}\right)\Rightarrow\frac{1}{-\frac{1}{2}x+cx^{-1}}=y-\frac{1}{x},$$

$$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{-\frac{1}{2}x+cx^{-1}}\Rightarrow y=x^{-1}+\frac{1}{\frac{-x+2cx^{-1}}{2}}\Rightarrow y=x^{-1}+\frac{2}{-x+2cx^{-1}},$$

$$y=x^{-1}+\frac{2}{-x+2cx^{-1}}\Rightarrow y=x^{-1}+\frac{2}{-x+2c\frac{1}{x}}\Rightarrow y=x^{-1}+\frac{2}{\frac{2c-x^{2}}{x}},$$

$$y=x^{-1}+\frac{2x}{2c-x^{2}}$$

Ejercicio32

Resolver la ecuacióndiferencial

$$\frac{dy}{dx}-y^{2}+2xy-x^{2}-1=0\,.$$

que admite la solución particular $y_1=x$.

Solución

Para resolver la ecuación tenemos que diferenciar $y=\frac{1}{u}+y_1=\frac{1}{u}+x$, es decir

$$dy=-u^{-2}du+dy_1=-u^{-2}du+dx\,,$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación original tenemos

$$\frac{dy}{dx}-y^{2}+2xy-x^{2}-1=0\Rightarrow -u^{-2}\frac{du+dx}{dx}-\left(\frac{1}{u}+x\right)^{2}+2x\left(\frac{1}{u}+x\right)-x^{2}-1=0\,,$$

$$-u^{-2}\frac{du}{dx}+\frac{dx}{dx}-\left(\frac{1}{u^{2}}+\frac{2x}{u}+x^{2}\right)+\frac{2x}{u}+2x^{2}-x^{2}-1=0\,,$$

$$-u^{-2}\frac{du}{dx}+1-\frac{1}{u^{2}}-\frac{2x}{u}-x^{2}+\frac{2x}{u}+2x^{2}-x^{2}-1=0\,,$$

$$-u^{-2}\frac{du}{dx}-\frac{1}{u^{2}}=0\,,$$

multiplicando por $-u^{2}$, tenemos

$$-u^{-2}\left(-u^{2}\right)\frac{du}{dx}-\left(-u^{2}\right)\frac{1}{u^{2}}=0\Rightarrow\frac{du}{dx}+1=0\,,$$

$$\frac{du}{dx}+1=0\Rightarrow\frac{du}{dx}=-1\Rightarrow du=-dx\,,$$

$$\int du=-\int dx\Rightarrow u=-x+c\,,$$

dado que $u=\frac{1}{y-y_1}=\frac{1}{y-x}$, tenemos

$$u=-x+c \Rightarrow \frac{1}{y-x}=-x+c \Rightarrow 1=(y-x)(-x+c),$$

$$1=(y-x)(-x+c) \Rightarrow \frac{1}{-x+c}=y-x \Rightarrow y=x+\frac{1}{-x+c}.$$

2.7.3 ECUACIONES DIFERENCIALES DE CLAIRAUT

La ecuación diferencial de Clairaut es de la forma

$$y=xp+\varphi(p), \quad p=y' \; . \tag{2.22}$$

Método de solución

Diferenciando obtenemos

$$y'=xp'+p+\varphi'(p)p',$$

dado que $(xp)'=xp'+p$ y $\varphi(p)'=\varphi'(p)p'$, así que

$$y'=xp'+p+\varphi'(p)p' \Rightarrow p=xp'+p+\varphi'(p)p',$$

$$xp'+\varphi'(p)p'=0 \Rightarrow (x+\varphi'(p))p'=0,$$

de esta ultima expresión, se deduce que

$$p'=0 \quad \text{y} \quad x+\varphi'(p)=0,$$

integrando la primera igualdad tenemos

$\int dp=0\int dx \Rightarrow p=c$,y de la segunda igualdad $x=-\varphi'(p)$,la solución será

$$y=-p\varphi'(p)+\varphi(p).$$

Ejercicio33

Resolver la ecuacióndiferencial

$$y=xp-\frac{p^2}{4}, \quad p=y'.$$

Solución

El primer paso es diferenciar la ecuación original

$$y=xp-\frac{p^2}{4} \Rightarrow y'=xp'+p-\frac{p}{2}p',$$

como $p=y'$, entonces

$$y'=xp'+p-\frac{p}{2}p' \Rightarrow p=xp'+p-\frac{p}{2}p' \Rightarrow xp'-\frac{p}{2}p'=0,$$

factorizando p', tenemos

$$p'\left(x-\frac{p}{2}\right)=0 \text{ ,de aquí se deducen dos igualdades } p'=0 \,\&\, x-\frac{p}{2}=0,$$

de la primera igualdad $p=c$ según el método de solución. La segunda igualdad proporciona

$p=2x$,este valor se sustituye en la ecuación original

$$y=xp-\frac{p^2}{4}\Rightarrow y=x2x-\frac{(2x)^2}{4}\Rightarrow y=2x^2-\frac{4x^2}{4}=x^2,$$

por lo tanto la solución será $y=x^2$.

Ejercicio34

Resolver la ecuacióndiferencial

$$y=xp+e^p,\quad p=y'.$$

Solución

El primer paso es diferenciar la ecuación original

$$y=xp+e^p\Rightarrow y'=xp'+p+e^p p',$$

como $p=y'$, entonces

$$y'=xp'+p+e^p p'\Rightarrow p=xp'+p+e^p p',$$

$$xp'+e^p p'=0 \text{,factorizando } p' \text{, tenemos } p'\left(x+e^p\right)=0,$$

de aquí se deducen dos igualdades

$$p'=0 \,\&\, x+e^p=0,$$

de la primera igualdad $p=c$ según el método de solución. La segunda igualdad proporciona p

$$x+e^p=0\Rightarrow e^p=-x\Rightarrow \ln e^p=\ln(-x)\Rightarrow p=\ln(-x),$$

este valor se sustituye en la ecuación original

$$y=xp+e^p\Rightarrow y=x\ln(-x)-x,$$

por lo tanto

$$y=-x+x\ln(-x).$$

Ejercicio35

Resolver la ecuacióndiferencial

$$y=xp+\frac{1}{2}sen(p),\quad p=y'.$$

Solución

El primer paso es diferenciar la ecuación original $y' = xp' + p + \frac{1}{2}cos(p)p'$,como $p = y'$,

entonces $y' = xp' + p + \frac{1}{2}cos(p)p' \Rightarrow p = xp' + p + \frac{1}{2}cos(p)p'$,

$xp' + \frac{1}{2}cos(p)p' = 0$,factorizando p' , tenemos $\left(x + \frac{1}{2}cos(p)\right)p' = 0$,de aquí se deducen dos igualdades $p' = 0$ & $x + \frac{1}{2}cos(p) = 0$,

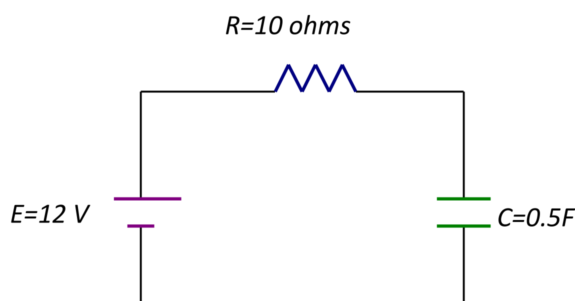
de la primera igualdad $p = c$ según el método de solución. La variable p se obtiene de la otra igualdad $x + \frac{1}{2}cos(p) = 0 \Rightarrow cos(p) = -2x \Rightarrow p = arccos(-2x)$, este valor se sustituye en la ecuación original obteniendo la solución de la ecuación diferencial dada

$$y = xp + \frac{1}{2}sen(p) \Rightarrow y = x\,arccos(-2x) + \frac{1}{2}sen(arccos(-2x)).$$

2.8 APLICACIONES

Ejercicio36

Determinar la corriente del siguiente circuito RC



Solución

La corriente que circula a través del circuito esta dada por

$$Ri + \frac{1}{C}q = E(t).$$

donde

R es la resistencia, C es la capacitancia, E es el voltaje, q es la carga, i es la corriente.

Sin embargo, necesitamos determinar antes la carga en el condensador, para ello usamos la ecuación diferencial

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t),$$

sustituyendo valores

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E(t)\Rightarrow 10\frac{dq}{dt}+2q=12\,,$$

dividamos la ecuación entre 10

$$10\frac{dq}{dt}+2q=12\Rightarrow\frac{dq}{dt}+0.2q=1.2$$

el factor integrante puede calcularse como

$$\int\frac{d\mu(t)}{\mu(t)}=\int 0.2qdt\Rightarrow\ln\mu=0.2qt\Rightarrow\mu=e^{0.2qt}\,,$$

multiplicando la ecuación por μ

$$e^{0.2qt}\frac{dq}{dt}+0.2e^{0.2qt}q=1.2e^{0.2qt}\Rightarrow\left(e^{0.2qt}q\right)'=1.2e^{0.2qt}\text{ ,integrando}$$

$$\int e^{0.2qt}q=1.2\int e^{0.2qt}dt\Rightarrow\int e^{0.2qt}q=1.2\int e^{0.2qt}dt\Rightarrow e^{0.2qt}q=0.24qe^{0.2qt}+c\,,$$

$$q=0.24q+ce^{-0.2qt}\Rightarrow q=\frac{1}{0.76}ce^{-0.2qt}\,,$$

sustituyendo este valor en

$$Ri+\frac{1}{C}q=E(t)\text{ , tenemos}$$

$$Ri+\frac{1}{C}q=E(t)\Rightarrow 10i+\frac{1}{0.5}\left\{\frac{1}{0.76}ce^{-0.2qt}\right\}=12$$

$$10i+\frac{1}{0.5}\left\{\frac{1}{0.76}ce^{-0.2qt}\right\}=12\Rightarrow i=\frac{1}{10}\left[12-\frac{1}{0.5}\left\{\frac{1}{0.76}ce^{-0.2qt}\right\}\right].$$

GUIA DE ESTUDIO

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales

SECCIONES 3.2

1. $y' = 4x + 6$
2. $y' = (4 + 3x)^4$
3. $y' = e^{-3x} + 2x$
4. $\frac{ds}{dt} = -sen3t$
5. $\frac{ds}{dt} = \ln t + 4t$
6. $y' = 4e^{x+y}$
7. $y' = e^{4x} - 5senx, \quad y(0) = 5$
8. $y' = x\sqrt{x^2 - 1}/y \;, y(-1) = 1$
9. $y' = e^x \cos^2 y, \quad y(0) = \pi/4$
10. $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$
11. $y' = \frac{y^2 + x^2}{2xy}$
12. $(3xy^2 + x^3)y' = 3y^3 + x^2 y, \quad y(1) = 2$
13. $(3xy^2 - x^3)y' = 3y^3 - x^2 y, \; y(1) = 0$
14. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x + 1}{y - x - 6}$
15. $\frac{dy}{dx} = \frac{y + x + 2}{y + x - 4}$
16. $y' = \frac{y - x + 8}{y - x - 1} \;, \quad y(1) = -2$
17. $y' = \frac{y - x - 2}{y - x + 7}, \; y(0.5) = 0.5$

Respuesta $y = 2x^2 - 6x + c$

Respuesta $y = 1/15(4 + 3x)^5 + c$

Respuesta $y = -\frac{1}{3}e^{-3x} + x^2 + c$

Respuesta $s = \frac{1}{3}\cos 3t + c$

Respuesta $s = t\ln t - t + 2t^2 + c$

Respuesta $4e^x + e^{-y} = c$

Respuesta $y = \frac{1}{4}e^{4x} + 5\cos x - \frac{1}{4}$

Respuesta $y = 2/3(x^2 - 1)^{3/2} + 1$

Respuesta $y = \arctan(e^x)$

Respuesta $\ln|x| = y^2/2x^2 + c$

Respuesta $y^2 - x^2 = cx$

Respuesta $y = 2x$

Respuesta $y = 0$

Respuesta $(y-x)^2-12y-2x=c$

Respuesta $y=3\ln|x+y-1|+x+c$

Respuesta $(y-x)^2-2(y-x)=18x-3$

Respuesta $(y-x)^2+14y+4x=9$

SECCION 2.5

1. $(y\cos x + 2xe^{y}) + (senx + x^2 e^{y} - 1)y' = 0$ — ***Respuesta*** $ysenx + x^2 e^{y} - y = c$

2. $(2x - y)dx + (2y - x)dy = 0$, $y(1) = 3$ — ***Respuesta*** $y = \left[x + \sqrt{28 - 3x^2}\right]/2$

3. $(9x^2 + y - 1)dx - (4y - x)dy = 0$, $y(1) = 0$ — ***Respuesta*** $y = \left(x - \{24x^3 + x^2 - 8x - 16\}^{1/2}\right)/4$

4. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax + by}{bx + cy}$ — ***Respuesta*** $k = ax^2 + 2bxy + cy^2$

5. *En los problemas 5a-5b, encuentre b para que la ecuación dada sea exacta y luego resuélvala*

5a. $(xy^2 + bx^2 y)dx + (y + x)x^2 dy = 0$ — ***Respuesta*** $b = 3, \quad c = x^2 y^2 + 2x^3 y$

5b. $(ye^{2xy} + x)dx + bxe^{2xy}dy = 0$ — ***Respuesta*** $b = 1, \quad c = e^{2x} + x^2$

6. $(3x^2 y + 2xy + y^3)dx + (y^2 + x^2)dy = 0$ — ***Respuesta*** $\mu(x) = e^{3x}, \quad c = (3x^2 y + y^3)e^{3x}$

7. $y' = e^{2x} + y - 1$ — ***Respuesta*** $\mu(x) = e^{-x}, \quad y = ce^{x} + 1 + e^{2x}$

8. $dx + (x/y - seny)dy = 0$ — ***Respuesta*** $\mu(y) = y, \quad xy + y\cos y - seny = c$

9. $ydx + (2yx - e^{-2y})dy = 0$ — ***Respuesta*** $\mu(y) = e^{y}/y, \quad xe^{2y} - \ln|y| = c$

10. $e^{x}dx + (e^{x}\cot y + 2y\csc y)dy = 0$ — ***Respuesta*** $\mu(y) = seny, \quad e^{x}seny + y^2 = c$

SECCIONES 2.6 Y 2.7

1. $y' - y = 2xe^{2x}$, $y(0) = 1$ — ***Respuesta*** $y = 3e^{x} + 2(x-1)e^{2t}$

2. $xy' + 2y = x^2 - x + 1$, $y(1) = 0.5$ — ***Respuesta*** $y = (3x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 1)/12x^2$

3. $y' + (2/x)y = (\cos x)/x^2$, $y(\pi) = 0$ — ***Respuesta*** $y = (senx)/x^2$

4. $x^3 y' + 4x^2 y = e^{-x}$, $y(-1) = 0$ — ***Respuesta*** $y = -(1+x)e^{-t}/x^4$

5. $xy' + (x+1)y = x$, $y(\ln 2) = 1$ — ***Respuesta*** $y = (x - 1 + 2e^{-x})/x$

6. $x^2 y' + 2xy - y^3 = 0$ — ***Respuesta*** $y = \pm\left[5x/(2 + 5cx^5)\right]^{1/2}$

7. $y' = ry - ky^2$, $r, k > 0$ — ***Respuesta*** $y = r/(k + cre^{-rx})$

8. $y' = \varepsilon y - \sigma y^3$, $\varepsilon, \sigma > 0$ — ***Respuesta*** $y = \pm\left[\varepsilon/(\sigma + c\varepsilon e^{-2\varepsilon x})\right]^{1/2}$

9. $y' + xy = xy^{-1/2}$ — ***Respuesta*** $y^{3/2} = 1 + ce^{-3x^2/4}$

10. $y' + \dfrac{1}{x}y = 4x^3 y^{-1}$ — ***Respuesta*** $y^2 = \dfrac{4}{3}x^4 + cx^{-2}$

11. $y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2, \quad y_1(x) = x$

Respuesta $y = x + (c - x)^{-1}$

12. $y' = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{y}{x} + y^2, \quad y_1(x) = \dfrac{1}{x}$

Respuesta $y = x^{-1} + 2x(c - x^2)^{-1}$

13. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\cos^2 x - sen^2 x + y^2}{2\cos x}, \; y_1(x) = senx$

Respuesta $y = senx + (c\cos x - \dfrac{1}{2} senx)^{-1}$

14. $y = xy' - \dfrac{1}{y'}$

Respuesta $y = cx - 1/c$ solución general

Respuesta $y^2 = -4x$ solución singular

15. $y = xy' + \dfrac{y'}{2}$

Respuesta $y = cx + c/2$

16. $y = xy' + \dfrac{1}{y'^2}$

Respuesta $y = cx + 1/c^2$ solución general

Respuesta $y = 3\sqrt[3]{x^2/4}$ solución singular

17. $y = xy' + \dfrac{5}{y'}$

Respuesta $y = cx + 5/c$ solución general

Respuesta $y^2 = 20x$ solución singular

18. $y = xy' + y'$

Respuesta $y = cx + c$

UNIDAD 3

ECUACIONES DIFERENCIALES DE N-ESIMO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES

3.1 INTRODUCCION

Una ecuación diferencial homogénea de enésimo orden con coeficientes constantes se puede escribir en la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0\,. \tag{3.1}$$

o bien como

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0\,.$$

donde los coeficientes $a_n, \cdots, a_0$ son números reales y $a_n \neq 0$ ¿Por qué?

La solución general de esta ecuación diferencial lineal homogénea de enésimo orden se expresa como una combinación lineal de n soluciones partículares linealmente independientes $y_1, \cdots, y_n$, es decir,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)\,. \tag{3.2}$$

En este caso para determinar la dependencia o independencia de las n soluciones $y_1, \cdots, y_n$ introducimos el determinante $n \times n$ denominado Wronskiano definido por

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}\,. \tag{3.3}$$

Tenemos dos casos

a) Si $W = 0$, las soluciones $y_1, \cdots, y_n$ son linealmente dependientes en un intervalo abierto I

b)Si $W \neq 0$, las soluciones $y_1, \cdots, y_n$ son linealmente independientes en cualquier punto de I

Ejercicio37

Pruebe que las trs soluciones $y_1(x)=x,\ y_2(x)=x\ln x\ \&\ y_3(x)=x^2$ ***de la ecuación diferencial homogénea***

$$x^3y'''-x^2y''+2xy'-2y=0.$$

son linealmente independientes

Solución

Determinando el Wronskiano, tenemos

$$W(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & x\ln x & x^2 \\ 1 & 1+\ln x & 2x \\ 0 & \frac{1}{x} & 2 \end{vmatrix}=x\,.$$

como $W\neq 0$, entonces las soluciones y_1,y_2,y_3 son linealmente independientes.

3.2 SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGENEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Dada la ecuación homogénea

$$a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+a_{n-2}y^{(n-2)}+\cdots+a_2y''+a_1y'+a_0y=0.$$

obtenemos la ecuación característica o auxiliar expresada como

$$a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+a_{n-2}r^{n-2}+\cdots+a_2r^2+a_1r+a_0=0. \qquad (3.4)$$

esta ecuación no es diferencial sino algebraica y la manera de formarla es realizando las siguientes "sustituciones"

$$y^{(n)}\ \to\ r^n,$$

$$y^{(n-1)}\ \to\ r^{n-1},$$

$\vdots\ \vdots$

$$y''\ \to\ r^2,$$

$$y'\ \to\ r,$$

el siguiente paso consiste en encontrar las raíces de (3.4). Supongamos que tales raíces son $r_1, r_2 \cdots, r_n$ entonces tenemos cuatro casos

***CASO 1*.RAICES REALES DISTINTAS**

Si las raíces $r_1, r_2 \cdots, r_n$ son reales y distintas, la solución de la ecuación homogénea puede escribirse como

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x} \ . \qquad (3.5)$$

***CASO 2*.RAICES REALES REPETIDAS**

Si la ecuación característica tiene una raíz *r* repetida de multiplicidad *k* entonces parte de la solución general de la ecuación diferencial (3.1) correspondiente únicamente a la raíz *r* es de la forma

$$\left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1}\right) e^{rx} \ . \qquad (3.6)$$

***CASO 3*.RAICES COMPLEJAS**

Si la ecuación auxiliar tiene un par repetido de raíces complejas conjugadas $a \pm bi$ con $b \neq 0$, entonces la solución de la ecuación homogénea será

$$e^{ax}\left(c_1 \cos bx + c_2 senbx\right) \ . \qquad (3.7)$$

***CASO 4*.RAICES COMPLEJAS REPETIDAS**

Si el par conjugado $a \pm bi$ tiene multiplicidad *k*, la solución es de la forma

$$\left(A_1 + A_2 x + \cdots + A_k x^{k-1}\right) e^{(a+bi)x} + \left(B_1 + B_2 x + \cdots + B_k x^{k-1}\right) e^{(a-bi)x} = \sum_{p=0}^{k-1} x^p e^{ax} (c_i \cos bx + d_i senbx) \qquad (3.8)$$

Ejercicio38

Resolver la ecuacióndiferencial

$$y''' + 3y'' - 10y' = 0 \ .$$

Solución

Como vemos, la ecuación esta igualada a cero y por lo tanto es homogénea. Procedemos a obtener su ecuación característica:

$$\mathrm{r}^3 + 3r^2 - 10r = 0 \, ,$$

Factorizando para determinar las raíces de la ecuación

$$r(r^2 + 3r - 10) = 0 \Rightarrow r(r+5)(r-2) = 0 \, ,$$

donde

$$r_1 = 0, \quad r_2 = -5, \quad r_3 = 2,$$

Entonces por el caso 1, la solución puede expresarse de la siguiente manera:

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^{-5x} + c_3 e^{2x},$$

Aplicando las condiciones iniciales $y(0) = 7$, $y'(0) = 0$ y $y''(0) = 70$ determinamos las constantes c_1, c_2 y c_3

$$y_h(x) = c_1 + c_2 e^{-5x} + c_3 e^{2x},$$

$$y_h'(x) = -5c_2 e^{-5x} + 2c_3 e^{2x},$$

$$y_h''(x) = 25c_2 e^{-5x} + 4c_3 e^{2x},$$

Consecuentemente

$$c_1 + c_2 e^{-5x} + c_3 e^{2x} = 7,$$

$$-5c_2 e^{-5x} + 2c_3 e^{2x} = 0,$$

$$25c_2 e^{-5x} + 4c_3 e^{2x} = 70,$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$c_1 = 0, \; c_2 = 2 \; \text{ y } \; c_3 = 5,$$

Finalmente la solución es

$$y_h(x) = 2e^{-5x} + 5e^{2x}.$$

Ejercicio39

Resolver la ecuacióndiferencial

$$9y^{(5)} - 6y^{(4)} + y^{(3)} = 0.$$

Solución

Procedemos a obtener su ecuación característica:

$$9r^5 - 6r^4 + r^3 = 0,$$

Factorizando para determinar las raíces de la ecuación

$$r^3(9r^2 - 6r + 1) = 0,$$

Entonces

$$r_1 = 0, \; r_2 = 0 \; \text{ y } \; r_3 = 0,$$

O bien $r = 0$ tiene multiplicidad tres. Hemos encontrado tres raíces que son cero y aplicando la formula general de segundo grado

$$r_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

en la ecuación

$$9r^2 - 6r + 1 = 0,$$

encontramos las dos raíces que nos faltaban: $r_4 = \frac{1}{3}$ y $r_5 = -\frac{1}{3}$,

Entonces la solución de la ecuación homogénea puede escribirse como

$$y_h(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{\frac{1}{3}x} + C_5 e^{-\frac{1}{3}x}.$$

Ejercicio40

Resolver la ecuacióndiferencial

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Solución

Su ecuación característica es

$$\mathrm{r}^2 - 4r + 5 = 0,$$

Aplicamos la ecuación general para conocer el valor de las dos raíces:

$$r_{12} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

Obtenemos $r_{12} = 2 \pm i$,

Por lo tanto

$$y_1 = e^{2x}\cos(x), \quad y_2 = e^{2x} sen(x),$$

Así, la solución de la ecuación homogénea puede escribirse como

$$y_h(x) = C_1 e^{2x}\cos(x) + C_2 e^{2x} sen(x).$$

Ejercicio41

Resolver la ecuacióndiferencial

$$y^{(3)} + y' - 10y = 0.$$

Solución

Obtenemos la ecuación característica

$$\mathrm{r}^3 + 3r - 10 = 0,$$

Para poder encontrar las raíces de esta ecuación aplicamos la división sintética

1	0	1	-10	2
1	2	4	10	
1	2	5	0	

Por lo tanto $r_1 = 2$,ahora solo nos falta encontrar el valor de las dos raíces de la ecuación

$$\mathrm{r}^2 + 2r \ \ + 5 = 0,$$

Cuando la resolvemos, encontramos $r_{12} = -1 \pm 2i$,

Por consiguiente
$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{-x} \cos(2x) + C_3 \mathrm{e}^{-x} sen(2x)$.

3.3 SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO HOMOGENEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Una ecuación lineal general no homogénea de enésimo orden con coeficientes constantes tiene la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x). \qquad (3.9)$$

la solución de la ecuación no homogénea se expresa como la suma de dos términos, el primer termino corresponde a la solución de la ecuación homogénea asociada a (3.9), es decir, a la ecuación diferencial

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

el segundo termino es una solución particular de (3.9). Matemáticamente, podemos escribir la solución de la ecuación no homogénea como

$$y(x) = y_h + y_p \ , \qquad (3.10)$$

donde y_h es la solución de la ecuación homogénea asociada y y_p es la solución particular. Para obtener y_h aplicamos los casos 1, 2, 3 o 4 vistos anteriormente. El problema ahora es determinar la solución particular y_p de la ecuación diferencial no homogénea, para ello aplicamos el método de coeficientes indeterminados o el método de variación de parámetros. Comenzaremos explicando el primer método.

3.3.1 METODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

El método de coeficientes indeterminados es un camino directo cuando la función $f(x)$ en (3.9) es lo suficientemente simple para **proponer** una adecuada expresión de y_p. El método debe su nombre a la siguiente razón: *una vez propuesta la forma de la solución particular, necesitamos obtener los coeficientes de la expresión* y_p. El siguiente ejemplo explica el argumento anterior

Ejercicio42

Encuéntrese una solución particular a la ecuación diferencial

$$y'' + 3y' + 4y = 3x + 2.$$

Solución

Como $f(x) = 3x + 2$ es un polinomio de grado uno, podemos pensar que la forma de y_p es

$$y_p = Ax + B,$$

que también es un polinomio de grado uno, pero con los coeficientes A y B indeterminados. La manera de encontrar A y B es obteniendo la primera y segunda derivada de y_p y sustituirlas en la ecuación diferencial

$$y_p' = A, \quad y_p'' = 0,$$

$$0 + 3(A) + 4(Ax + B) = 3x + 2, \qquad \textit{(Sustituyendo en la ecuación diferencial)}$$

acomodando términos

$$4Ax + (3A + 4B) = 3x + 2,$$

igualando los coeficientes de iguales potencias de x

$$4A = 3,$$
$$3A + 4B = 2,$$

de aquí $A = 3/4$ y $B = -1/16$. De este modo, la solución particular se escribe como

$$y_p = Ax + B = \frac{3}{4}x - \frac{1}{16}$$

La idea central del método de coeficientes indeterminados podemos resumirla en dos puntos:

i)Proponer una expresión para la solución particular y_p *de acuerdo con* $f(x)$.

ii) Determinar los coeficientes correspondientes.

El método se aplica siempre que la función $f(x)$ en (3.9) sea una combinación lineal (finita) de productos de funciones de los siguientes tres tipos:

1. Un polinomio en x

2. Una función exponencial e^{rx}

3. $\cos kx$ *o* $senkx$

Algunos autores establecen dos criterios sobre el método de coeficientes indeterminados para facilitar su aplicación.

CRITERIO 1

Supóngase que ningún término que aparece en $f(x)$ o en cualquiera de sus derivadas satisface la ecuación homogénea asociada. Entonces, tómese como una solución de prueba para y_p una combinación lineal de esos términos linealmente independientes y de sus derivadas. Determínense los coeficientes por sustitución de esta solución de prueba dentro de la ecuación no homogénea.

CRITERIO 2

Si la función $f(x)$ es de cualquiera de las formas

$$P_m(x)e^{rx}\cos kx \quad \text{o} \quad P_m(x)e^{rx}senkx.$$

tómese como una propuesta de solución

$$y_p(x) = x^s\left[\left(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_mx^m\right)e^{rx}\cos kx + \left(B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_mx^m\right)e^{rx}senkx\right] \tag{3.11}$$

donde s es el entero no negativo mas pequeño tal que no existe un termino en y_p que duplique a un termino en la función complementaria y_h. Determínese, posteriormente, los coeficientes en (3.11) por sustitución de y_p en la ecuación no homogénea.

Nota

Es común tener $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, *donde* $f_1(x)$ *y* $f_2(x)$ *son funciones diferentes de las presentadas en la tabla 3.1. En este caso, se toma* y_p *como la suma de las soluciones propuestas para* $f_1(x)$ *y* $f_2(x)$, *seleccionándolas por separado para cada parte, y así eliminar la duplicación con la función complementaria.*

Tabla 3.1

$f(x)$	y_p
$P_m = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$	$x^s\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_m x^m\right)$
$a\cos kx + b sen kx$	$x^s(A\cos kx + B sen kx)$
$e^{rx}(a\cos kx + b sen kx)$	$x^s e^{rx}(A\cos kx + B sen kx)$
$P_m(x)e^{rx}$	$x^s\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_m x^m\right)e^{rx}$
$P_m(x)e^{rx}\,(a\cos kx + b sen kx)$	$x^s\left[\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_m x^m\right)e^{rx}\cos kx + \left(B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_m x^m\right)e^{rx} sen kx\right]$

Ejercicio43

Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 4y = 3x^3.$$

Solución

Primero determinamos la solución de la ecuación homogénea asociada

$$y'' + 4y = 0,$$

Cuya ecuación característica es de la forma

$$r^2 + 4 = 0,$$

las dos raíces son imaginarias $r_{12} = \pm 2i$, entonces

$$y_h(x) = c_1\cos(2x) + c_2 sen(2x),$$

Ahora nos compete encontrar la solución particular. Sabemos que

$$f(x) = 3x^3,$$

Proponemos:

$$y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

Luego, obtenemos la primera y segunda derivada de y_p

$$y'_p(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C\,,$$

$$y''_p(x) = 6Ax + 2B\,,$$

sustituimos en la ecuación original

$$6Ax + 2B + 4(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 3x^3\,,$$

$$6Ax + 2B + 4Ax^3 + 4Bx^2 + 4Cx + 4D = 3x^3\,,$$

agrupamos

$$(4A)x^3 + (4B)x^2 + (6A + 4C)x + 4D + 2B = 3x^3\,,$$

De modo que

$$4Ax^3 = 3x^3\,,$$

$$(4B)x^2 = 0\,,$$

$$6A + 4C = 0\,,$$

$$4D + 2B = 0\,,$$

Cuando resolvemos el sistema de ecuaciones

$$A = \frac{3}{4},\;\; B = 0\,,\; C = -\frac{9}{8}\; \text{ y } \; D = 0\,,$$

Sustituyendo estos valores en y_p

$$y_p(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{8}x\,,$$

La solución de la ecuación diferencial será la suma de la solución de la ecuación homogénea asociada y de la solución particular

$$y(x) = y_h + y_p = C_1\cos(2x) + C_2 sen(2x) + \frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{8}x\,.$$

Ejercicio44

Resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x} - 10\cos(3x)\,,\ \ y(0) = 1\,,\ \ y'(0) = 2\,.$$

por el método de coeficientes indeterminados

Solución

Ecuación homogénea asociada $\qquad y'' - 3y' + 2y = 0\,,$

Ecuación característica:

$$r^2 - 3r + 2 = 0\,,$$

Factorizando para determinar las raíces de la ecuación $(r-2)(r-1) = 0$, implica que $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, entonces, la solución de la ecuación homogénea puede escribirse como

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x}\,,$$

encontramos la solución particular por el método de coeficientes indeterminados

Sabemos que

$f(x) = 3e^{-x} - 10\cos(3x)$,

nuestra solución particular puede ser

$$y_p(x) = Ae^{-x} + B\cos 3x + C sen 3x\,,$$

derivando

$$y_p'(x) = -Ae^{-x} - 3B sen 3x + 3C\cos 3x\,,$$

$$y_p''(x) = Ae^{-x} - 9B\cos 3x - 9C sen 3x\,,$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y agrupando coeficientes, tenemos

$$6Ae^{-x} + (-7B - 9C)\cos 3x + (9B - 7C) sen 3x = 3e^{-x} - 10\cos(3x)\,,$$

Igualando coeficientes

$$6A = 3\,,$$

$$-7B - 9C = -10\,,$$

$$9B - 7C = 0\,,$$

Donde las soluciones del sistema son

$$A = \frac{1}{2}\,,\ B = \frac{7}{13}\ \text{y}\ C = \frac{9}{13}\,,$$

Así, la solución particular será

$$y_p(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{7}{13}\cos 3x + \frac{9}{13}sen3x\,,$$

Para satisfacer las condiciones iniciales, se inicia con la solución general

$$y(x) = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{7}{13}\cos 3x + \frac{9}{13}sen3x\,,$$

Derivando

$$y'(x) = c_1e^{x} + 2c_2e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{21}{13}sen3x + \frac{27}{13}\cos 3x\,,$$

Las condiciones $y(0)=1$, $y'(0)=2$ generan el sistema

$$y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{2} + \frac{7}{13} = 1\,,$$

$$y'(0) = c_1 + 2c_2 - \frac{1}{2} + \frac{27}{13} = 2\,,$$

Cuya solución es

$$c_1 = -\frac{1}{2} \text{ y } c_2 = \frac{6}{13}\,,$$

Por lo tanto

$$y(x) = -\frac{1}{2}e^{x} + \frac{6}{13}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{7}{13}\cos 3x + \frac{9}{13}sen3x\,.$$

Ejercicio45

Resolver la ecuación diferencial

$$y^{(3)} + 9y' = xsen(x) + x^2e^{2x}\,.$$

Solución

Ecuación homogénea asociada $y^{(3)} + 9y' = 0$ y la ecuación característica

$$\mathrm{r}^3 + 9r = 0\,,$$

Factorizando para determinar las raíces de la ecuación

$$r(r^2+9) = 0\,,$$

Por lo tanto una raíz es $r_1 = 0$, las otras dos raíces son $r_{12} = \pm 3i$, entonces

$$y_h(x) = c_1 + c_2\cos(3\mathrm{x}) + c_3 sen(3x)\,,$$

Sabemos que

$$f(x) = x sen(x) + x^2 e^{2x},$$

Proponemos

$$y_p(x) = A sen(x) + B\cos(x) + Cx\ sen(x) + Dx\cos(x) + Ee^{2x} + Fxe^{2x} + Gx^2e^{2x},$$

$$y_p'(x) = e^{2x}(2Gx^2 + 2x(F + G) + F + 2E) + (Cx + A + D)\cos x - (Dx + B - C) sen x,$$

$$y_p''(x) = 2e^{2x}(2Gx^2 + 2x(F + 2G) + 2F + G + 2E) - (Dx + B - 2C)\cos x -$$
$$(Cx + A + 2D) sen x,$$

$$y_p'''(x) = 4e^{2x}(2Gx + 2x(F + 3G) + 3F + 3G + 2E) - (Cx + A + 3D)\cos x +$$
$$(Dx + B - 3C) sen x,$$

Ahora sustituimos en la ecuación original y determinamos lo valores

$$A = \frac{14}{137},\ B = 0,\ C = 0,\ D = \frac{13}{92},\ E = 129,\ F = \frac{3}{13}\ \text{y}\ G = 0,$$

Por lo tanto el resultado es:

$$y(x) = y_h + y_p$$
$$= c_1 + c_2\cos(3\text{x}) + c_3 sen(3x) + \frac{14}{137} sen(x) + \frac{13}{92} x\cos(x) + 129e^{2x} + \frac{3}{13} xe^{2x},$$

3.3.2 METODO DE VARIACION DE PARAMETROS

El método de variación de parámetros en principio (si las integrales que aparecen pueden resolverse) puede utilizarse siempre para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x).$$

Conociendo de antemano la solución de la ecuación lineal homogénea asociada

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

El siguiente teorema muestra cómo usar el método de variación de parámetros

TEOREMA VARIACION DE PARAMETROS

Si la ecuación no homogénea $y'' + P(x) y' + Q(x) y = f(x)$ tiene función complementaria $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, entonces una solución particular esta dada por

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x) f(x)}{W(x)} dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)} dx \ . \qquad (3.12)$$

donde $W = W(y_1, y_2)$ es el Wronskiano de las dos soluciones independientes y_1 y y_2 de la ecuación homogénea asociada.

Ejercicio46

Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + y = \tan(x).$$

Solución

Ecuación homogénea $y'' + y = 0$,

Procedemos a obtener su ecuación característica $r^2 + 1 = 0$, entonces las dos raíces imaginarias son $r_{12} = \pm i$. Por lo tanto

$y_h(x) = c_1 \cos(x) + c_2 sen(x)$,

Ahora determinamos el Wronskiano con $y_1 = \cos x$ y $y_2 = senx$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & senx \\ -senx & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2(x) + sen^2(x) = 1,$$

aplicando la formula

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x) f(x)}{W(x)} dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)} dx,$$

tenemos

$$y_p(x) = -\cos x \int senx \tan x dx + senx \int \cos x \tan x dx\,,$$

$$y_p(x) = -\cos x \int senx \frac{senx}{\cos x} dx + senx \int \cos x \frac{senx}{\cos x} dx\,,$$

$$y_p(x) = -\cos x \int \frac{sen^2 x}{\cos x} dx + senx \int senx dx\,,$$

$$y_p(x) = -\cos x \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} dx + senx \int senx dx\,,$$

$$y_p(x) = -\cos x \int \frac{1}{\cos(x)} dx + \cos x \int \cos x dx + senx \cos x\,,$$

$$y_p(x) = -\cos x \int \sec x dx - senx \cos x + senx \cos x\,,$$

$$y_p(x) = -\cos x \ln\left|\sec x + \tan x\right|,$$

la solución general puede escribirse como

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 senx - \cos x \ln\left|\sec x + \tan x\right|.$$

Ejercicio47

Resolver la ecuación diferencial

$$4y'' + 4y' + y = 3xe^x\,.$$

Solución

La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada es

$$4r^2 + 4r + 1 = 0\,,$$

y las raíces son

$$r_{12} = -\frac{1}{2}\,,$$

por consiguiente

$$y_h(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{1}{2}x}\,,$$

tomando en cuenta que $y_1 = e^{-\frac{1}{2}x}$ y $y_2 = xe^{-\frac{1}{2}x}$, el Wronskiano proporciona el resultado

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{-\frac{1}{2}x} & xe^{-\frac{1}{2}x} \\ -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} & -\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x} \end{vmatrix}=e^{-x},$$

aplicando la formula

$$y_p(x)=-y_1(x)\int\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}dx+y_2(x)\int\frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}dx,$$

$$y_p(x)=-e^{-\frac{1}{2}x}\int\frac{xe^{-\frac{1}{2}x}3xe^{x}}{e^{-x}}dx+xe^{-\frac{1}{2}x}\int\frac{e^{-\frac{1}{2}x}3xe^{x}}{e^{-x}}dx,$$

$$y_p(x)=-3e^{-\frac{1}{2}x}\int x^2e^{\frac{3}{2}x}dx+3xe^{-\frac{1}{2}x}\int xe^{\frac{3}{2}x}dx,$$

resolviendo la primera integral por partes, tenemos

$$\int x^2e^{\frac{3}{2}x}dx=\frac{2}{3}x^2e^{\frac{3}{2}x}-\frac{4}{3}\int xe^{\frac{3}{2}x}dx,$$

utilizamos una vez mas la integración por partes en la ultima integral

$$\int x^2e^{\frac{3}{2}x}dx=\frac{2}{3}x^2e^{\frac{3}{2}x}-\frac{4}{3}\int xe^{\frac{3}{2}x}dx=\frac{2}{3}x^2e^{\frac{3}{2}x}-\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}xe^{\frac{3}{2}x}-\frac{2}{3}\int e^{\frac{3}{2}x}dx\right),$$

$$\int x^2e^{\frac{3}{2}x}dx=\frac{2}{3}x^2e^{\frac{3}{2}x}-\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}xe^{\frac{3}{2}x}-\frac{4}{9}e^{\frac{3}{2}x}\right)=\frac{2}{3}x^2e^{\frac{3}{2}x}-\frac{8}{9}xe^{\frac{3}{2}x}+\frac{16}{27}e^{\frac{3}{2}x},$$

entonces

$$y_p(x)=-3e^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{2}{3}x^2e^{\frac{3}{2}x}-\frac{8}{9}xe^{\frac{3}{2}x}+\frac{16}{27}e^{\frac{3}{2}x}\right)+3xe^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{2}{3}xe^{\frac{3}{2}x}-\frac{4}{9}e^{\frac{3}{2}x}\right),$$

La solución es:

$$y(x)=c_1e^{-\frac{1}{2}x}+xc_2e^{-\frac{1}{2}x}-3e^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{2}{3}x^2e^{\frac{3}{2}x}-\frac{8}{9}xe^{\frac{3}{2}x}+\frac{16}{27}e^{\frac{3}{2}x}\right)+3xe^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{2}{3}xe^{\frac{3}{2}x}-\frac{4}{9}e^{\frac{3}{2}x}\right).$$

Ejercicio48

Resolver la ecuación diferencial

$$y'' - y' - 2y = 3x + 4\,.$$

Solución

La solución de la ecuación homogénea es

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}\,,$$

calculando el Wronskiano

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -3e^{x}\,,$$

aplicando la formula

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x) f(x)}{W(x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)}dx\,,$$

$$y_p(x) = -e^{2x}\int \frac{e^{-x}(3x+4)}{-3e^{x}}dx + e^{-x}\int \frac{e^{2x}(3x+4)}{-3e^{x}}dx\,,$$

$$y_p(x) = \frac{1}{3}e^{2x}\int e^{-2x}(3x+4)dx - \frac{1}{3}e^{-x}\int e^{x}(3x+4)dx\,,$$

$$y_p(x) = e^{2x}\int e^{-2x}xdx + \frac{4}{3}e^{2x}\int e^{-2x}dx - e^{-x}\int e^{x}xdx - \frac{1}{3}e^{-x}\int e^{x}dx\,,$$

integrando por partes la primera y tercera integrales, tenemos

$$\int e^{-2x}xdx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\,,$$

$$\int e^{x}xdx = e^{x}x - \int e^{x}dx = e^{x}x - e^{x}\,,$$

$$y_p(x) = e^{2x}\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right) + \frac{4}{3}e^{2x}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - e^{-x}\left(e^{x}x - x\right) - \frac{1}{3}e^{-x}e^{x}\,,$$

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - x + e^{-x}x - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}x + e^{-x}x + \frac{7}{12}\,,$$

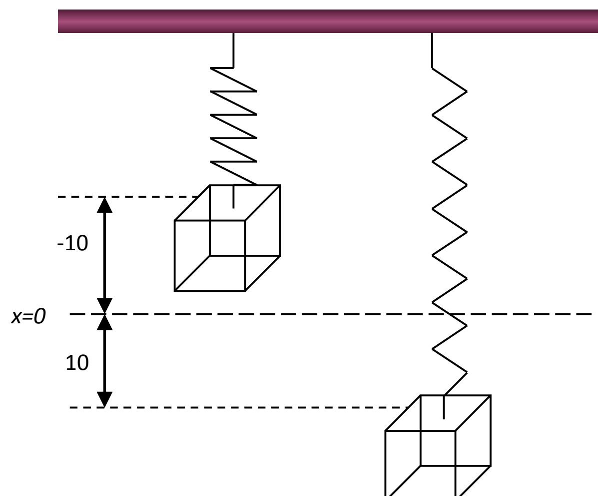
La solución es

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2}x + e^{-x}x + \frac{7}{12}\,.$$

3.4 APLICACIONES

Ejercicio49

Encuentre la expresión de la posición del resorte del siguiente sistema mecánico.



Solución

El sistema masa-resorte satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2}+w^2x=0,$$

donde $w^2=k/m$. Esta expresión describe el movimiento armónico simple. Si suponemos que la frecuencia $w=4$, entonces la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{d^2x}{dt^2}+16x=0,$$

con las condiciones iniciales $x(0)=10$ y $x'(0)=0$, según la figura. Para resolver la ecuación necesitamos encontrar la ecuación característica dada como

$$r^2+16=0$$

donde las raíces son $r_{1,2}=\pm 4i$. En este caso, la solución de la ecuación puede escribirse de la siguiente manera

$$x(t)=c_0\cos 4t+c_1 sen\, 4t\,,$$

las constantes c_0 y c_1 se calculan usando las condiciones iniciales $x(0)=10$ y $x'(0)=0$, es decir,

$$x'(t) = -4c_0 sen 4t + 4c_1 \cos 4t \ ,$$

implica que

$$x(t) = c_0 \cos 4t + c_1 sen\, 4t \Rightarrow 10 = c_0 \cos 0 + c_1 sen\, 0 \Rightarrow c_0 = 10 \ ,$$

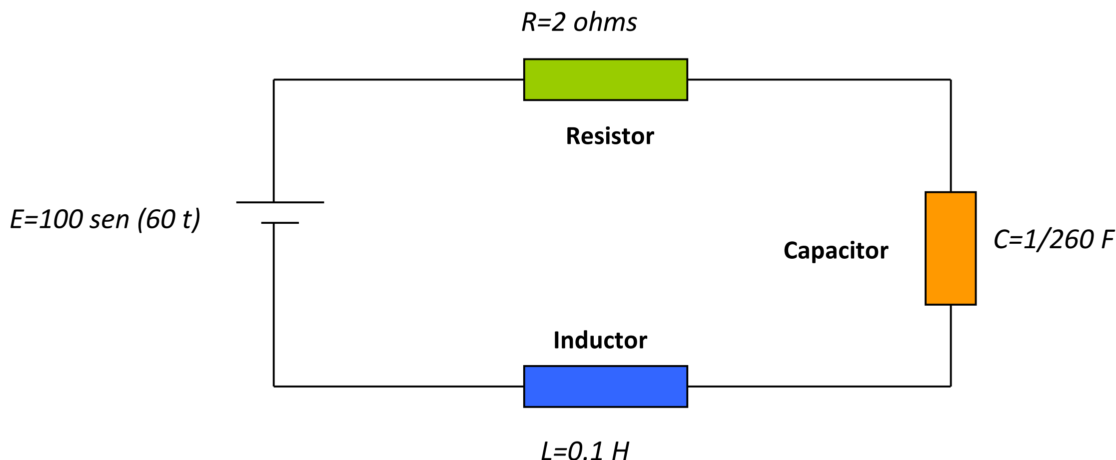
y
$$x'(t) = -4c_0 sen 4t + 4c_1 \cos 4t \Rightarrow 0 = -40 \cos 0 + c_1 sen\, 0 \Rightarrow c_1 = 0 \ ,$$

Por lo tanto, la expresión buscada es $x(t) = 10 \cos 4t$.

Ejercicio50

Encuentre la carga en el capacitor d el circuito RCL.

Solución



La ley de Kirchhoff establece que

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E \ .$$

donde

L = inductancia

C = Capacitancia

R = resistencia

E = diferencia de potencial o voltaje

Para resolver la ecuación de Kirchhoff sustituimos los valores numéricos

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E \Rightarrow 0.1\frac{d^2q}{dt^2} + 2\frac{dq}{dt} + 260q = 100\, sen\, 60t \ ,$$

el coeficiente del primer término de la ecuación debe ser uno, así que

$$0.1\frac{d^2q}{dt^2}+2\frac{dq}{dt}+260q=100\,sen\,60t \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2}+20\frac{dq}{dt}+2600q=1000\,sen\,60t\,,$$

las condiciones iniciales serian $q(0)=0$ y $q'(0)=0$. La ecuación homogénea es

$$\frac{d^2q}{dt^2}+20\frac{dq}{dt}+2600q=0\,,$$

y su respectiva ecuación característica $m^2+20m+2600=0$ proporciona las raíces $m_{1,2}=-10\pm 50i$.

Así, tenemos la solución $q_h(t)=e^{-10t}\left[c_0 sen 50t+c_1\cos 50t\right]$.

Ahora bien, el método de coeficientes indeterminados establece que para la función $f(t)=100sen60t$

$q_p(t)=Asen60t+B\cos 60t$, derivando dos veces esta expresión

$$q_p{}'(t)=60A\cos 60t-60Bsen60t\,,$$

$$q_p{}''(t)=-3600Asen60t-3600B\cos 60t\,,$$

entonces

$$\frac{d^2q}{dt^2}+20\frac{dq}{dt}+2600q=1000\,sen\,60t \Rightarrow$$

$$-3600Asen60t-3600B\cos 60t+20\left[60A\cos 60t-60Bsen60t\right]+2600\left[Asen60t+B\cos 60t\right]=$$

$$1000sen60t\,.$$

Acomodando términos

$$(-1000A-1200B)sen60t+(-1000B+1200A)\cos 60t=1000sen60t\,,$$

implica el sistema de ecuaciones

$$-1000A-1200B=1000\,,$$

$$-1000B-1200A=0\,,$$

donde $B=-30/11$ y $A=25/11$. La solución particular es

$$q_p(t)=Asen60t+B\cos 60t \Rightarrow q_p(t)=\frac{25}{11}sen60t-\frac{30}{11}\cos 60t\,,$$

mientras que la solución general será q_h+q_p, es decir

$$q(t)=e^{-10t}\left[c_0 sen50t+c_1\cos 50t\right]+\frac{25}{11}sen60t-\frac{30}{11}\cos 60t\,.$$

Cuando aplicamos las condiciones iniciales tenemos

$$q(t)=0.77e^{-10t}sen(50t-0.88)-6.64e^{-10t}\cos(50t-0.69)\,.$$

UNIDAD 4

ECUACIONES DIFERENCIALES DE N-ESIMO ORDEN CON COEFICIENTES VARIABLES

4.1 INTRODUCCION

En las secciones anteriores abordamos el problema de resolver ecuaciones lineales diferenciales con coeficientes constantes. El proceso se redujo a encontrar las raíces de la ecuación característica o auxiliar y la aplicación de los métodos de coeficientes indeterminados o de variación de parámetros. Sin embargo no existe un proceso similar para las ecuaciones lineales con coeficientes variables con excepción de algunos tipos. Por lo general, las soluciones de estas ecuaciones requieren de técnicas de series de potencias, por lo que empezaremos con un breve repaso de ellas no si antes estudiar la ecuación de Cauchy- Euler.

4.2 METODO DE CAUCHY-EULER

Toda ecuación de la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x). \quad (4.1)$$

puede considerarse como una ecuación de Cauchy-Euler, donde $a_n, \cdots, a_0$ son constantes. La característica principal de este tipo de ecuación consiste en que el grado de los coeficientes monomiales de x es el mismo que el orden de la ecuación dada. Por simplicidad consideremos la ecuación de segundo grado

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0.$$

Método de solución

Supongamos una solución de la forma $y = x^m$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = m x^{m-1} \;\&\; \frac{d^2 y}{dx^2} = m(m-1) x^{m-2}.$$

Por lo tanto

$$ax^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + bx \frac{dy}{dx} + cy = 0 \Rightarrow ax^2 m(m-1) x^{m-2} + bxm(m-1) x^{m-1} + cx^m = 0,$$

$$am(m-1)x^m + bm(m-1)x^m + cx^m = 0,$$

$$x^m\{am(m-1)+bm(m-1)+c\}=0\,,$$

de esta expresión obtenemos una ecuación auxiliar dada como

$$am(m-1)+bm(m-1)+c=0 \quad \text{o} \quad am^2+(b-a)m+c=0\,. \qquad (4.2)$$

Hay tres casos distintos a considerar dependiendo si las raíces de la ecuación son

a) *Reales y distintas*
b) *Reales repetidas*
c) *Complejas*

Caso 1. Raíces reales distintas

Si m_1 y m_2 son las raíces de la ecuación auxiliar $am^2+(b-a)m+c=0$, la solución de la caución diferencial

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=0\,,$$

será

$$y=c_1x^{m_1}+c_2x^{m_2}\,. \qquad (4.3)$$

Ejercicio51

Resolver la ecuación diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-4y=0\,.$$

Solución

Supongamos una solución de la forma $y=x^m$, entonces

$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}\ \&\ \frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)x^{m-2}\,,$$

sustituyendo en la ecuación dada tenemos

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}-4y=0\Rightarrow x^2m(m-1)x^{m-2}-2xmx^{m-1}-4x^m=0\,,$$

$$m(m-1)x^m-2mx^m-4x^m=0\,,$$

nuestra ecuación auxiliar es

$$x^m\left(m(m-1)-2m-4\right)=0\Rightarrow x^m\left(m^2-3m-4\right)=0\,,$$

resolviendo la ecuación de segundo grado por factorización tenemos

$$m^2 - 3m - 4 = (m+1)(m-4) = 0\,,$$

implica que $m_1 = -1 \,\&\, m_2 = 4$. Así que la solución de la ecuación diferencial será

$y = c_1 x^{-1} + c_2 x^4$.

Caso 2. Raíces reales iguales

En este caso transformamos la ecuación $ax^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} + bx\dfrac{dy}{dx} + cy = 0$ a la forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{b}{ax}\frac{dy}{dx} + \frac{c}{ax^2}y = 0\,,$$

dividiendo entre ax^2. Por los métodos del capitulo anterior identificamos

$$p(x) = x^{m_1}\int \frac{e^{-(b/a)\ln x}}{x^{2m_1}}dx \Rightarrow p(x) = x^{m_1}\int x^{-b/a}x^{-2m_1}dx\,,$$

como $m_1 = m_2 = -(b-a)/2a$, implica que

$$p(x) = x^{m_1}\int x^{-b/a}x^{(b-a)/a}dx \Rightarrow p(x) = x^{m_1}\int x^{-b/a}x^{b/a}x^{-a/a}dx\,,$$

$$p(x) = x^{m_1}\int x^{-1}dx \Rightarrow p(x) = x^{m_1}\, ln\, x\,,$$

la solución general es

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1}\, ln\, x\,. \qquad (4.4)$$

Ejercicio 52

Resolver la ecuación diferencial

$$4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} + y = 0\,.$$

Solución

Primero encontremos las raíces de la ecuación mediante la sustitución $y = x^m$

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} \;\&\; \frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}\,,$$

sustituyendo en la ecuación dada

$$4x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 8x\frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow 4x^2 m(m-1)x^{m-2} + 8xmx^{m-1} + x^m = 0\,,$$

$$4m(m-1)x^m + 8mx^m + x^m = 0\,,$$

$$x^m\left(4m^2+4m+1\right)=0,$$

resolviendo la ecuación de segundo grado por factorización

$$4m^2+4m+1=\left(2m+1\right)^2=0\Rightarrow m_1=-\frac{1}{2}=m_2,$$

el siguiente paso es transformar la ecuación original dividiendo entre $4x^2$

$$4x^2\frac{d^2y}{dx^2}+8x\frac{dy}{dx}+y=0\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{8x}{4x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{4x^2}y=0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{4x^2}y=0,$$

así que

$$p(x)=x^{m_1}\int\frac{e^{-(b/a)\ln x}}{x^{2m_1}}dx\Rightarrow p(x)=x^{-1/2}\int\frac{e^{-2\ln x}}{x^{-2(1/2)}}dx,$$

$$p(x)=x^{-1/2}\int\frac{e^{\ln x^{-2}}}{x^{-1}}dx\Rightarrow p(x)=x^{-1/2}\int\frac{x^{-2}}{x^{-1}}dx=x^{-1/2}\int x^{-1}dx,$$

$$p(x)=x^{-1/2}\ln x,$$

por lo tanto la solución general es

$$y=c_1x^{-1/2}+c_2x^{-1/2}\ln x.$$

Caso 3. Raíces complejas

Si las raíces de la ecuación

$$am^2+(b-a)m+c=0,$$

son complejas digamos $m_1=\alpha+\beta i$ y $m_2=\alpha-\beta i$, entones la solución general de la ecuación

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2}+bx\frac{dy}{dx}+cy=0,$$

será

$$y=x^{\alpha}\left[c_1\cos(\beta\ln x)+c_2\,sen(\beta\ln x)\right]. \quad (4.5)$$

Ejercicio53

Resolver la ecuación diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+3y=0,\quad y(1)=1,\; y'(1)=-5.$$

Solución

Primero encontremos las raíces de la ecuación mediante la sustitución $y=x^m$

$$\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}\ \&\ \frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)x^{m-2},$$

sustituyendo en la ecuación original

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+3y=0\Rightarrow x^2m(m-1)x^{m-2}+3xmx^{m-1}+3x^m=0,$$

$$m(m-1)x^m+3mx^m+3x^m=0,$$

$$\left(m^2+2m+3\right)=0,$$

aplicando la formula cuadrática, las raíces de la ecuación auxiliar son

$$m_1=-1+\sqrt{2}\,i\ \text{ y }\ m_2=-1-\sqrt{2}\,i,$$

por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial será

$$y=x^{-1}\left[c_1\cos\left(\sqrt{2}\ln x\right)+c_2 sen\left(\sqrt{2}\ln x\right)\right].$$

Para determinar las constantes c_1 y c_2 usemos las condiciones iniciales $y(1)=1$, $y'(1)=-5$, pero antes obtengamos la primera derivada de la solución y

$$y'=x^{-1}\left[-\sqrt{2}c_1\frac{1}{x}sen\left(\sqrt{2}\ln x\right)+\sqrt{2}\frac{1}{x}c_2\cos\left(\sqrt{2}\ln x\right)\right]-x^{-2}\left[c_1\cos\left(\sqrt{2}\ln x\right)+c_2 sen\left(\sqrt{2}\ln x\right)\right],$$

y de la condición $y'(1)=-5$, tenemos

$$-5=1^{-1}\left[-\sqrt{2}c_1\frac{1}{1}sen\left(\sqrt{2}\ln 1\right)+\sqrt{2}\frac{1}{1}c_2\cos\left(\sqrt{2}\ln 1\right)\right]-1^{-2}\left[c_1\cos\left(\sqrt{2}\ln 1\right)+c_2 sen\left(\sqrt{2}\ln 1\right)\right],$$

$$-5=\sqrt{2}c_2-c_1,$$

por otro lado, de la expresión

$$y=x^{-1}\left[c_1\cos\left(\sqrt{2}\ln x\right)+c_2 sen\left(\sqrt{2}\ln x\right)\right],$$

$$1=1^{-1}\left[c_1\cos\left(\sqrt{2}\ln 1\right)+c_2 sen\left(\sqrt{2}\ln 1\right)\right],\qquad 1=c_1,$$

sustituyendo este valor en $-5=\sqrt{2}c_2-c_1$, obtenemos $c_2=-2\sqrt{2}$, la solución general será

$$y=x^{-1}\left[\cos\left(\sqrt{2}\ln x\right)-2\sqrt{2}sen\left(\sqrt{2}\ln x\right)\right].$$

4.3 METODO DE SERIES DE POTENCIAS

4.3.1 REPASO DE SERIES DE POTENCIAS

Recordemos que una serie de potencias en (potencias de *x*) $x-a$ es una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \tag{4.6}$$

Si $a=0$, esta es la serie de potencias de *x*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \tag{4.7}$$

El repaso se limitara básicamente a la serie de potencias de *x*, tomando en cuenta que cada propiedad general de esta serie puede trasladarse a una propiedad general en la serie de potencias de $x-a$, reemplazando *x* por $x-a$. Decimos que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge en el intervalo *I* siempre que exista el límite

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n x^n \ , \tag{4.8}$$

En este caso la suma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \ ,$$

se define en *I*, y a la serie $\sum c_n x^n$ se llama representación en series de potencias de la función *f* en *I*. Resulta muy útil para el curso memorizar las siguientes series

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{4.9}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{4.10}$$

$$sen x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \tag{4.11}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{4.12}$$

$$senh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \tag{4.13}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots \tag{4.14}$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots \tag{4.15}$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!}+\cdots \tag{4.16}$$

4.3.2 OPERACIONES CON SERIES DE POTENCIAS

Si $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ y $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$, entonces

i) $f(x)\pm g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$, (4.17)

ii) $f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots$ (4.18)

donde $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$.

Esta serie es el resultado de multiplicar cada termino de la primera serie por cada termino de la segunda serie y luego agrupando coeficientes de las mismas potencias de *x*.

*iii)***El cociente** de dos series de potencias se calcula por división como se ilustra en la siguiente figura 4.1. Como podemos observar dividimos la serie de Taylor del $\cos x$ entre el $sen\,x$, el resultado son los primeros términos de la serie de Taylor de la $\tan x$, es decir

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots \tag{4.19}$$

$$x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{317}+\cdots$$

$$1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\cdots \Big) \; x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\cdots$$

$$\underline{x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{24}-\frac{x^7}{720}+\cdots}$$

$$\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}+\frac{x^7}{840}+\cdots$$

$$\underline{\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{6}+\frac{x^7}{72}-\cdots}$$

$$\frac{2x^5}{15}-\frac{x^7}{15}+\cdots$$

$$\underline{\frac{2x^5}{15}-\frac{x^7}{15}+\cdots}$$

$$\frac{17x^7}{315}+\cdots$$

$$\vdots$$

Figura 4.1. Obtención de la serie de la *tanx* mediante la división de las series de *senx* y *cosx*

TEOREMA 4.1 DERIVACION DE UNA SERIE DE POTENCIAS

Si la representación de la serie de potencias

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

de la función *f* converge en el intervalo abierto *I*, entonces *f* es derivable en *I* y

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + \cdots + n c_n x^{n-1} + \cdots$$

Ejercicio54

Obtener la primera derivada de la serie geométrica (4.15)

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Solución

La derivada del miembro izquierdo es

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2},$$

y derivando termino a termino el lado derecho, tenemos:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=1+2x+3x^2+\cdots$$

TEOREMA 4.2 PRINCIPIO DE IDENTIDAD DE SERIES DE POTENCIAS

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ para toda x en algún intervalo abierto *I*, entonces $a_n=b_n$, para toda $n\geq 0$

4.3.3 CORRIMIENTO DEL INDICE DE LA SUMA

El corrimiento del índice en una suma $\sum$ es muy importante para resolver ecuaciones diferenciales con coeficientes variables. Expliquemos el mecanismo con el siguiente ejemplo, supongamos que tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n \ .$$

Introducimos un corrimiento del índice de la suma en +1 en la serie de la izquierda. Esto es, simultáneamente se incremento el índice de la suma en 1 (reemplazando *n* por $n+1$, simbólicamente $n\rightarrow n+1$) y se disminuyo el punto de partida en 1, es decir, de $n=1$ a $n=0$, obteniendo de esta manera la serie de la derecha.

En general, puede realizarse un corrimiento del índice de la suma en *k* unidades para una serie infinita si en forma simultanea se incrementa el índice de la suma en *k*($n\rightarrow n+k$) y también se disminuye el valor de inicio en k .

Ejercicio55

En la serie $\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^{n-1}$ un corrimiento de $+2(n\rightarrow n+2)$ da como resultado la serie

$$\sum_{n+2=3}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2-1}=\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2}x^{n+1} \ ,$$

Si *k* es negativa, se interpreta una "disminución de *k*" como un incremento $-k=|k|$. Así, un corrimiento en $-2(n\rightarrow n-2)$ en el índice de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ proporciona el resultado

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}=\sum_{n=3}^{\infty}(n-2)c_{n-2}x^{n-3} \ ,$$

4.3.4 SOLUCION EN SERIES DE POTENCIAS

El método de series de potencias para resolver ecuaciones diferenciales consiste en sustituir la serie de potencias

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \ . \tag{4.20}$$

En la ecuación diferencial, y luego se determinan los valores de los coeficientes $c_0, c_1, \cdots$ para que la serie de potencias satisfaga la ecuación diferencial. Este método se asemeja al de los coeficientes indeterminados, pero aquí se tiene de alguna manera una infinidad de coeficientes por determinar. El método no siempre funciona, pero cuando lo hace se obtiene una solución representada por una serie infinita, en contraste con las soluciones de "forma cerrada" dadas por los métodos descritos anteriormente. La siguiente definición es útil antes de ilustrar algunos ejemplos.

DEFINICION 4.1

Si la serie de Taylor de la función *f* converge a $f(x)$ para toda *x* en algún intervalo abierto que contenga *a*, entonces se dice que la función f es analítica en el punto $x=a$.

Ejercicio56

Resolver la ecuación diferencial

$$y' + 2y = 0 \ .$$

Solución

Tenemos que obtener la primera derivada de la serie (4.20), si desarrollamos algunos términos de ella resulta mas sencillo

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} \ ,$$

sustituyendo ambas series en la ecuación $y' + 2y = 0$, tenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \ , \tag{4.21}$$

El siguiente paso es reescribir la primera serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ de tal forma que la potencia de la variable *x* sea *n* en vez de $n-1$. Para lograrlo requerimos de un corrimiento del índice en esta serie, sustituyendo $n \to n+1$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n+1=1}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^{n+1-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n \ ,$$

entonces, la ecuación (4.21) se transforma en

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \ , \qquad (4.22)$$

como podemos ver la variable *x* tiene la misma potencia en las dos series. Ahora necesitamos factorizar en una sola suma la expresión anterior de la siguiente manera:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)c_{n+1} + 2c_n\right]x^n = 0 \ ,$$

para que se cumpla la igualdad, el termino dentro de la suma debe ser cero, es decir

$$\left[(n+1)c_{n+1} + 2c_n\right]x^n = 0 \ ,$$

pero como $x^n \neq 0$, entonces

$$(n+1)c_{n+1} + 2c_n = 0 \ ,$$

de las dos constantes c_{n+1} y c_n despejamos por lo general c_{n+1}:

$$c_{n+1} = -\frac{2c_n}{n+1} \ , \qquad (4.23)$$

la ecuación (4.23) se llama *relación de recurrencia* . De esta importante relación podemos calcular $c_1, c_2, \cdots$ en términos de c_0 ; el ultimo valor c_n será la constante que se esperaba encontrar como solución general de la ecuación diferencial $y' + 2y = 0$. El siguiente paso consiste en determinar una expresión para c_n a partir de la ecuación (4.23).

Con $n = 0 \Rightarrow c_1 = -\dfrac{2c_0}{0+1} = -\dfrac{2c_0}{1}$,

Con $n = 1 \Rightarrow c_2 = -\dfrac{2c_1}{1+1} = -\dfrac{2}{2}\left(-\dfrac{2c_0}{1}\right) = \dfrac{2^2}{2!}c_0$,

Con $n = 2 \Rightarrow c_3 = -\dfrac{2c_2}{2+1} = -\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2^2}{2!}c_0\right) = -\dfrac{2^3}{3!}c_0$,

Con $n=3 \Rightarrow c_4 = -\frac{2c_3}{3+1} = -\frac{2}{4}\left(-\frac{2^3}{3!}c_0\right) = \frac{2^4}{4!}c_0$,

Con $n=4 \Rightarrow c_5 = -\frac{2c_4}{4+1} = -\frac{2}{5}\left(\frac{2^4}{4!}c_0\right) = -\frac{2^5}{5!}c_0$,

Con $n=5 \Rightarrow c_6 = -\frac{2c_5}{5+1} = -\frac{2}{6}\left(-\frac{2^5}{5!}c_0\right) = \frac{2^6}{6!}c_0$,

$\vdots$

después de n procesos obtenemos

$$c_n = (-1)^n \frac{2^n}{n!}c_0, \qquad n \geq 1 \tag{4.24}$$

el factor $(-1)^n$ se debe al alternancia de los signos (-) y (+). Entonces, la solución dada por (4.20) tiene la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} c_0 x^n = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^n = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!},$$

pero como

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

implica que

$$e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = 1 - 2x + \frac{4x^2}{2!} - \frac{8x^3}{3!} + \cdots$$

por consiguiente la solución es

$$y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = c_0 e^{-2x}.$$

Ejercicio57

Resolver la ecuación diferencial

$$(x-3)y' + 2y = 0.$$

Solución

Como en el ejemplo 1 la derivada de $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es $y' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$, sustituyendo en la ecuación

$$(x-3)\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0,$$

simplificando
$$x\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} - 3\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n} - 3\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \text{ (\textit{Introducción de x dentro de la suma})}$$

para lograr que *x* tenga el mismo exponente *n* en todas las sumas, realizamos los siguientes cambios: en la suma $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n}$, reemplazamos $n=1$ por $n=0$ sin ningún efecto en el resultado, en la suma $3\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$, reemplazamos n por $n+1 \Rightarrow 3\sum_{n+1=1}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^{n+1-1} = 3\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^{n}$

por consiguiente

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n} - 3\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1) x^{n} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0, \qquad (4.25)$$

factorizando

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[c_n n - 3(n+1)c_{n+1} + 2c_n\right] x^n = 0,$$

consecuentemente

$$c_n n - 3(n+1)c_{n+1} + 2c_n = 0,$$

obteniéndose la formula de recurrencia

$$c_{n+1} = \frac{n+2}{3(n+1)}c_n,$$

Con $n=0 \Rightarrow c_1 = \frac{2c_0}{3} = \frac{2c_0}{3}$,

Con $n=1 \Rightarrow c_2 = \frac{3c_1}{3\cdot 2} = \frac{3}{3\cdot 2}\left(\frac{2c_0}{3}\right) = \frac{3}{3^2}c_0$,

Con $n=2 \Rightarrow c_3 = \frac{4c_2}{3\cdot 3} = \frac{4}{3\cdot 3}\left(\frac{3}{3^2}c_0\right) = \frac{4}{3^3}c_0$,

Con $n=3 \Rightarrow c_4 = \frac{5c_3}{3\cdot 4} = \frac{5}{3\cdot 4}\left(\frac{4}{3^3}c_0\right) = \frac{5}{3^4}c_0$,

Con $n=4 \Rightarrow c_5 = \frac{6c_4}{3\cdot 5} = \frac{6}{3\cdot 5}\left(\frac{5}{3^4}c_0\right) = \frac{6}{3^5}c_0$,

Con $n=5 \Rightarrow c_6 = \dfrac{7c_5}{3\cdot 6} = \dfrac{7}{3\cdot 6}\left(\dfrac{6}{3^5}c_0\right) = \dfrac{7}{3^6}c_0$,

⋮ ⋮

podemos establecer que $c_n = \dfrac{n+1}{3^n}c_0$, por lo tanto la solución en series de potencias que se propone es $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{3^n}x^n$.

Ejercicio58

Resolver la ecuación diferencial

$$y''+y=0.$$

Solución

Dada la solución $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, las derivadas son $y'=\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ & $y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$,

Al sustituir y y y'' en la ecuación diferencial, se llega a

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0,$$

realizando el cambio $n \;\to\; n+2$ en la primera suma

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n,$$

entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2}+c_n\right]x^n = 0,$$

de aquí

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}+c_n=0,$$

la formula de recurrencia será:

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+1)(n+2)},$$

Con $n=0 \Rightarrow c_2 = -\dfrac{c_0}{1\cdot 2} = -\dfrac{c_0}{2!}$,

Con $n=1 \Rightarrow c_3 = -\dfrac{c_1}{2\cdot 3} = -\dfrac{c_1}{3!}$,

Con $n=2 \Rightarrow c_4 = -\frac{c_2}{3\cdot 4} = -\frac{1}{3\cdot 4}\left(-\frac{1}{2!}c_0\right) = \frac{1}{4!}c_0$,

Con $n=3 \Rightarrow c_5 = -\frac{c_3}{4\cdot 5} = -\frac{1}{4\cdot 5}\left(-\frac{1}{3!}c_1\right) = \frac{1}{5!}c_1$,

Con $n=4 \Rightarrow c_6 = -\frac{c_4}{5\cdot 6} = -\frac{1}{5\cdot 6}\left(\frac{1}{4!}c_0\right) = -\frac{1}{6!}c_0$,

Con $n=5 \Rightarrow c_7 = -\frac{c_5}{6\cdot 7} = -\frac{1}{6\cdot 7}\left(\frac{1}{5!}c_1\right) = -\frac{1}{7!}c_1$,

⋮ ⋮

deducimos que, para las constantes c con subíndices pares $c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{(2k)!}$ y las constantes con subíndices impares $c_{2k+1} = \frac{(-1)^k c_1}{(2k+1)!}$, de esta manera se obtiene la solución de series de potencias

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

sin embargo de (4.10 y 4.11) $y(x) = c_0 \cos x + c_1 senx$.

DEFINICION 4.2 PUNTO SINGULAR REGULAR

El punto singular $x=0$ de la ecuación

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \qquad (4.26)$$

Es un punto singular regular si las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ son ambas analíticas en $x=0$. En caso contrario es un punto singular irregular.

4.4 METODO DE FROBENIUS

Ahora intentaremos encontrar soluciones de una ecuación diferencial lineal de segundo orden cerca de un punto singular regular $x=0$. La ecuación más simple de este tipo es la ecuación de coeficientes constantes

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_o y = 0. \qquad (4.27)$$

en este caso puede comprobarse que $y(x) = x^r$ es solución de la ecuación cuadrática

$$r(r-1) + p_0 r + q_o = 0,$$

para demostrarlo, obtengamos las derivadas de la solución $y(x) = x^r$ y sustituyámosla en (4.27)

$$y(x)=x^r\,,\quad y'(x)=rx^{r-1}\ \text{ y }\ y''(x)=r(r-1)x^{r-2}\,,$$

$$x^2r(r-1)x^{r-2}+p_0xrx^{r-1}+q_ox^r=0\,,$$

o bien
$$r(r-1)x^r+p_0rx^r+q_ox^r=0\,,$$

factorizando x^r $x^r\left[r(r-1)+p_0r+q_o\right]=0$,

como $x^r\neq 0$, entonces
$$r(r-1)+p_0r+q_o=0\,, \tag{4.28}$$

la ecuación anterior se llama *ecuación de índices.*

Para investigar la posible existencia de una solución en serie de Frobenius se inicia con la ecuación

$$x^2y''+p(x)xy'+q(x)y=0\,, \tag{4.29}$$

si $x=0$ es un punto singular regular, entonces $p(x)$ y $q(x)$ son analíticas en este punto, de tal menara que

$$p(x)=p_0+p_1x+p_2x+p_3x+\cdots$$

$$q(x)=q_0+q_1x+q_2x+q_3x+\cdots \tag{4.30}$$

Supongamos que la ecuación $x^2y''+p(x)xy'+q(x)y=0$ tiene una solución en series de Frobenius

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}\,, \tag{4.31}$$

al derivar se tiene

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)x^{n+r-1}\ \text{ y }\ y''=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}\,, \tag{4.32}$$

sustituyendo en (4.29)

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+p(x)x\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)x^{n+r-1}+q(x)\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0\,,$$

simplificando y usando (4.30)

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}+\left[p_0+p_1x+p_2x+\cdots\right]\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)x^{n+r}+$$
$$\left[q_0+q_1x+q_2x+\cdots\right]\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{n+r}=0,$$

o como

$$\left[r(r-1)c_0x^r+r(r+1)c_1x^{r+1}+\cdots\right]+\left[p_0+p_1x+p_2x+\cdots\right]\left[rc_0x^{r-1}+r(r+1)c_1x^r+\cdots\right]$$

$$+\left[q_0+q_1x+q_2x+\cdots\right]\left[c_0x^r+c_1x^{r+1}+\cdots\right]=0,$$

después de la multiplicación de los términos iniciales de los dos productos en el lado izquierdo, y agrupando coeficientes de x^r, se observa que el termino de menos grado en la ecuación anterior es $x^r\left[r(r-1)+p_0 r+q_o\right]c_0$, entonces r debe satisfacer la ecuación cuadrática $r(r-1)+p_0 r+q_o=0$.

En la práctica, particularmente cuando los coeficientes de la ecuación diferencial son polinomios, la forma más simple de encontrar p_0 y q_0 consiste en escribir la ecuación de la forma

$$y''+\frac{p_0+p_1x+p_2x+\cdots}{x}y'+\frac{q_0+q_1x+q_2x+\cdots}{x}y=0. \tag{4.33}$$

La inspección de las series que aparecen en los dos numeradores revela las constantes p_0 y q_0.

4.4.1 SOLUCIONES EN SERIES DE FROBENIUS

Una ves que se conocen los exponentes r_1 y r_2, los coeficientes de una solución en series de Frobenius se determinan sustituyendo las series en la ecuación diferencial. Si los exponentes r_1 y r_2 son complejos conjugados, entonces siempre existirán dos soluciones en términos de las series de Frobenius linealmente independientes. Restringiremos el estudio para el caso en que r_1 y r_2 son reales.

TEOREMA 4.3 SOLUCIONES EN SERIES DE FROBENIUS

Supóngase que $x=0$ es un punto singular regular de la ecuación

$$x^2y''+p(x)xy'+q(x)y=0.$$

Si $\rho>0$ representa el mínimo de los radios de convergencia de las series de potencias

$$p(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n \;\text{ y }\; q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n,$$

si r_1 y r_2 son raíces (reales), con $r_1\geq r_2$, de la ecuación de índices

$$r(r-1)+p_0r+q_o=0,$$

Entonces:

a) Para $x>0$ existe una solución de la ecuación (4.29) de la forma

$$y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.\;(a_0\neq 0) \tag{4.34}$$

Correspondiente a la raíz más grande r_1.

b) Si la diferencia r_1-r_2 no es ni cero ni un entero positivo, entonces existe una segunda solución linealmente independiente para $x>0$ de la forma

$$y_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \ .(b_0 \neq 0) \qquad (4.35)$$

Correspondiente a la raíz más pequeña r_2 .

Los coeficientes de estas series pueden determinarse sustituyendo las series en la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + p(x)xy' + q(x)y = 0 .$$

Nota

Si $r_1 = r_2$, existe solo una solución en términos de series de Frobenius.

4.5 APLICACIONES

Ejercicio59

Resolver la ecuación diferencial

$$2x^2 y'' + 3xy' - (x^2 + 1)y = 0 .$$

Solución

Dividamos primero la ecuación por el término $2x^2$ para transformarla en (4.29)

$$y'' + \frac{\frac{3}{2}}{x} y' + \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2}{x^2} y = 0 ,$$

Observándose que $x = 0$ es un punto singular regular, y que $p_0 = \frac{3}{2}$ y $q_0 = -\frac{1}{2}$. Ahora bien, debido a que $p(x) \equiv \frac{3}{2}$ y $q(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2$ son polinomios, la serie de Frobenius obtenida será convergente para toda $x > 0$. La ecuación de índices es

$$r(r-1) + p_0 r + q_o = 0 \quad \Rightarrow \quad r(r-1) - \frac{3}{2}r - \frac{1}{2} = 0 ,$$

Factorizando

$$r(r-1) - \frac{3}{2}r - \frac{1}{2} = \left(r - \frac{1}{2}\right)(r+1) = r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0 ,$$

De modo que las raíces $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = -1$ son los exponentes. Verifiquemos la hipótesis b) del teorema 4.3, es decir, $r_1 - r_2 = -\frac{1}{2}$ como la diferencia es un número negativo el teorema garantiza la existencia de dos soluciones linealmente independientes. Entonces de (4.32) tenemos

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}\ ,\quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r-1} \quad \text{y} \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}\ ,$$

Sustituyendo en la ecuación

$$2x^2 y'' + 3xy' - (x^2+1) y = 0\ ,$$

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} + 3x \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r-1} - (x^2+1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0\ ,$$

Simplificando

$$2\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0\ ,$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0\ ,$$

En esta etapa debemos de correr los índices de tal manera que cada exponente sea igual al más pequeño índice que este presente. En este caso, se corren los índices de la tercera suma, sustituyendo $n \to n-2$, implica

$$2\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r} - \sum_{n-2=0}^{\infty} c_{n-2} x^{n-2+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0\ ,$$

$$\text{o}\quad 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r} - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0\ , \qquad (4.36)$$

El rango común de la suma es $n \geq 2$, por lo que deben tratarse a $n = 0$ y $n = 1$ por separado, en otras palabras tenemos que desarrollar la suma con n = 1, 2

$$2\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} = 2c_0 r(r-1) x^r + 2c_1 (r+1) r x^{r+1} + 2\sum_{n=2}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r}\ ,$$

$$3\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r} = 3c_0 r x^r + 3c_1 (r+1) x^{r+1} + 3\sum_{n=2}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r}\ ,$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = -c_0 x^r - c_1 x^{r+1} - \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^{n+r}\ ,$$

Consideremos los términos correspondientes a $n = 0$ en cada una de las sumas anteriores y sumémoslas

$$2c_0r(r-1)x^r+3c_0rx^r-c_0x^r=c_0[2r(r-1)+3r-1]x^r=0,$$

Con lo cual

$$c_0[2r(r-1)+3r-1]x^r=0 \Rightarrow 2\left(r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}\right)c_0=0,$$

Reproduciéndose la misma ecuación de índices. Cuando $n=1$, obtenemos

$$2c_1(r+1)rx^{r+1}+3c_1(r+1)x^{r+1}+c_1x^{r+1}=c_1[2(r+1)r+3(r+1)-1]x^{r+1}=0,$$

$$2(r+1)r+3(r+1)-1=0,$$

$$2r^2+5r+2=0,$$

Como $2r^2+5r+2\neq 0$ para $r_1=\frac{1}{2}$ y $r_2=-1$, concluimos que $c_1=0$. (4.37)

Determinemos el coeficiente de x^{n+r}

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+r}[2c_n(n+r)(n+r-1)+3c_n(n+r)-c_{n-2}-c_n]=0,$$

$$2c_n(n+r)(n+r-1)+3c_n(n+r)-c_{n-2}-c_n=0,$$

Despejando c_n y simplificando tenemos

$$c_n=\frac{c_{n-2}}{2(n+r)^2+(n+r)-1}. \quad \text{para} \quad n\geq 2 \tag{4.38}$$

Las dos soluciones de la ecuación diferencial se determinan considerando por separado las raíces $r_1=\frac{1}{2}$ y $r_2=-1$ en (4.38) y por la tanto hay dos casos:

Caso 1. $r_1=\frac{1}{2}$. Escribimos a_n en lugar de c_n y sustituimos $r_1=\frac{1}{2}$, con esto obtenemos la formula de recurrencia

$$c_n=\frac{c_{n-2}}{2(n+r)^2+(n+r)-1} \quad \Rightarrow \quad a_n=\frac{a_{n-2}}{2(n+\frac{1}{2})^2+(n+\frac{1}{2})-1},$$

$$a_n=\frac{a_{n-2}}{2n^2+3n}. \quad \text{para} \quad n\geq 2 \tag{4.39}$$

Calculamos algunos valores de n

Con $n=1 \Rightarrow a_1=0$,

Con $n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{a_0}{14}$,

Con $n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{c_1}{27} = 0$,

Con $n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{a_2}{44} = \frac{a_2}{616}$,

Con $n = 5 \Rightarrow a_5 = \frac{a_3}{65} = 0$,

Con $n = 6 \Rightarrow a_6 = \frac{a_4}{90} = \frac{a_4}{55440}$,

$\vdots$

Así, la primera solución de Frobenius es por (4.34)

$$y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^{1/2}\left(a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \cdots\right)$$

$$y_1(x) = a_0x^{1/2}\left(1 + \frac{x^2}{14} + \frac{x^4}{616} + \frac{x^6}{55440} + \cdots\right).$$

Caso 2. $r_2 = -1$, similarmente sustituimos b_n en vez de c_n y sustituimos $r_2 = -1$, como resultado obtenemos

$$b_n = \frac{b_{n-2}}{2n^2 - 3n}. \quad \text{para} \quad n \geq 2 \tag{4.40}$$

Luego

Con $n = 1 \Rightarrow b_1 = 0$,

Con $n = 2 \Rightarrow b_2 = \frac{b_0}{2}$,

Con $n = 3 \Rightarrow b_3 = \frac{b_1}{9} = 0$,

Con $n = 4 \Rightarrow b_4 = \frac{b_2}{20} = \frac{b_0}{40}$,

Con $n = 5 \Rightarrow b_5 = \frac{b_3}{35} = 0$,

Con $n = 6 \Rightarrow b_6 = \frac{b_4}{54} = \frac{b_0}{2160}$,

$\vdots$

La segunda solución de Frobenuis está dada por la ecuación (4.35)

$$y_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = x^{-1}\left(b_0x^0 + b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 + \cdots\right),$$

$$y_2(x) = b_0x^{-1}\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{40} + \frac{x^6}{2160} + \cdots\right).$$

Ejercicio60

Resolver la ecuación diferencial

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$

Solución

Dividiendo la ecuación entre x^2

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2}{x^2}y = 0,$$

Por tanto $x = 0$ es un punto singular regular con $p(x) \equiv 1$ y $q(x) = x^2$, de tal manera que las series serán convergentes para $x > 0$. Debido a que $p_0 = 1$ y $q_0 = 0$, la ecuación de índices es

$$r(r-1) + r = r^2 = 0,$$

De este modo se tiene solo un exponente $r = 0$ y por tanto existe solamente una solución en términos de la serie de Frobenius

$$y(x) = x^0\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

Sustituyendo (4.32)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0,$$

Las dos primeras sumas dan como resultado

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\left[n(n-1) + n\right]x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n n^2x^n,$$

Sustituyendo $n+2$ por $n-2$ en la tercera suma tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} \overset{n-2}{\rightarrow} \sum_{n-2=0}^{\infty} c_{n-2}x^{n+2-2} = \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n,$$

Así que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n^2x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n = 0,$$

Pero $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n n^2 x^n = c_0(0)x^0 + c_1(1)x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n n^2 x^n \ ,$$

Lo que implica que

$$c_0(0)x^0 + c_1(1)x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n n^2 x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n = 0 \,,$$

$$c_0(0)x^0 + c_1(1)x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[c_n n^2 + c_{n-2}\right] x^n = 0 \,,$$

Entonces $$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n^2} \,.$$

El termino $c_0(0)x^0$ no proporciona ninguna información y del termino $c_1(1)x^1 \Rightarrow c_1 = 0$

Luego

Con $n = 2 \Rightarrow c_2 = -\frac{c_0}{2^2}$,

Con $n = 3 \Rightarrow c_3 = \frac{c_1}{3^2} = 0$,

Con $n = 4 \Rightarrow c_4 = \frac{c_2}{4^2} = -\frac{c_0}{2^2 \cdot 4^2}$,

Con $n = 5 \Rightarrow c_5 = \frac{c_3}{5^2} = 0$,

Con $n = 6 \Rightarrow c_6 = \frac{c_4}{6^2} = -\frac{c_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}$,

$\vdots$

Evidentemente, el patrón es

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2} \,.$$

La elección de $c_0 = 1$ proporciona una de las más importantes funciones especiales en matemáticas, conocida como la función de Bessel de orden cero de primera clase, y se representa por $J_0(x)$. De este modo

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \,.$$

GUIA DE ESTUDIO

Calcule el Wronskiano de cada conjunto de funciones

1. e^{-x}, e^{-4x}
2. e^{ax}, e^{bx}, donde a y b son reales
3. e^{ax}, xe^{bx}
4. $sen\beta x, \cos\beta x$
5. $1, x, x^2$

Resolver las ecuaciones diferenciales

1. $y'' + y' - 2y = 0$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0$
3. $y'' + 2y' + 2y = 0$
4. $y'' + 9y = 0$
5. $y''' + y = 0$
6. $y''' - 3y'' - 9y' - 5y = 0$

Resolver por el método de coeficientes indeterminados las ecuaciones diferenciales

1. $y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x} + x$
2. $y'' - 2y' + y = 6e^{x} + 8e^{-x} - 2$
3. $y'' + 8y' = 48x^2 + 65senx$, $y(10^{-12}) = 1$, $y'(1) = 0.232$
4. $y'' - 2y' = 2e^{2x} + 4\cos 2x$
5. $y'' + 16y = 17e^{x} - 8sen4x$
6. $y'' - 4y = -12e^{-2x} + 15\cos x + 8x$, $y(0.23) = 1.3$, $y'(1.23) = 2.4$
7. $y'' + 6y' + 9y = 4e^{-3x} + 50senx$
8. $y''' - 2y'' - y' + 2y = -8e^{x} + 6e^{-x}$
9. $y^{iv} - 16y = e^{2x} - 15\cos x$

Por el método de variación de parámetros obtenga las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $y'' - 5y' + 6y = 2e^{x}$
2. $y'' - y' - 2y = 2e^{-x}$, $y(0.23456) = 1.345$, $y'(0) = 2.456$
3. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$

4. $4y''-4y'+y=16e^{x/2}$, $y(0.23)=1.3,$ $y'(1.23)=2.4$

5. $y''+y=\tan x$

6. $y''+4y'+4y=x^{-2}e^{-2x}$

7. $4y''+y=2\sec(x/2)$, $y(10^{-12})=1,$ $y'(1)=0.232$

8. $y''+9y=9\sec^3(3x)$

9. $y''+4y=3\csc(2x)$, $y(10^{-12})=1,$ $y'(1)=0.232$

10. $y''-2y'+y=e^{-x}/(1+x^2)$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Cauchy-Euler

1. $x^2y''-12y=0$

2. $x^2y''+\frac{2}{3}xy'-\frac{2}{9}y=0$, $y(0)=1,$ $y'(1)=2$

3. $x^2y''+2xy'-12y=0$

4. $x^2y''+5xy'+4y=0$, $y(0.23456)=1.345,$ $y'(0)=2.456$

5. $x^2y''+5xy'-5y=0$

6. $x^2y''+8xy'+10y=0$, $y(0.23)=1.3,$ $y'(1.23)=2.4$

7. $x^2y''-3xy'+5y=0$

8. $x^2y''+3xy'+\frac{5}{4}y=0$, $y(10^{-12})=1,$ $y'(1)=0.232$

9. $x^2y''-xy'+10y=0$

10. $x^2y''+5xy'+8y=0$

Usando el método de series de potencias resuelva las ecuaciones diferenciales

1. $y''+xy=0$

2. $(x^2+1)y''+xy'-y=0$

3. $y''-(1+x)y=0$

4. $y''+y\cos x=0$

5. $y''-xy=0$

6. $y''+x^2y=0$

7. $y''-xy'+2y=0$

8. $y''-2xy'+y=0$

9. $(x-1)y''+y'=0$

10. $(x^2-1)y''+xy'-y=0$

UNIDAD 5

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALESCON COEFICIENTES CONSTANTES

5.1 INTRODUCCION

Sin entrar a la teoría formal de los sistemas de ecuaciones diferenciales explicaremos solo dos métodos para resolverlos. Ejemplos de sistemas de ecuaciones diferenciales se muestran a continuación

$$a)\begin{cases} 4\dfrac{d^2x}{dt^2} = -5x + y \\ 2\dfrac{d^2y}{dt^2} = 3x - y \end{cases} \quad b)\begin{cases} x' - 3x + y' + z' = -5 \\ x' \qquad - y' + 2z' = t^2 \\ \qquad x + y' - 6z' = t - 1 \end{cases},$$

Describamos entonces el primer método para resolver sistemas de ecuaciones.

5.2 SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES POR EL METODO DE OPERADORES

Este método se basa en rescribir cada una de las ecuaciones que forman al sistema en notación de operadores y luego resolver el sistema por eliminación. El operador que utilizaremos consiste en escribir de otra manera el símbolo de la derivada, es decir, hasta ahora trabajamos con dy/dx o bien como

$$\frac{d}{dx}(y).$$

Nosotros cambiaremos el símbolo $\dfrac{d}{dx}$ por la letra D (llamado operador), se llama así porque un operador "actúa" siempre sobre lo que está a su derecha y no a su izquierda. Entonces la expresión

$\dfrac{d}{dx}(y)$ es equivalente a Dx.

Teniendo esto en mente podemos rescribir los sistemas mencionados anteriormente como

$$\begin{cases} 4\dfrac{d^2x}{dt^2} = -5x + y \\ 2\dfrac{d^2y}{dt^2} = 3x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4D^2x - 5x = y \\ 2D^2y + y = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (4D^2 - 5)x = y \\ (2D^2 + 1)y = 3x \end{cases},$$

$$\begin{cases} x' - 3x + y' + z' = -5 \\ x' \quad\quad - y' + 2z' = t^2 \\ \quad\quad x + y' - 6z' = t - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (D-3)x + Dy + Dz = -5 \\ Dx \quad\quad - Dy + 2Dz = t^2 \\ \quad\quad x + Dy - 6Dz = t - 1 \end{cases},$$

Ejercicio61

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$y' = 2x,$$
$$x' = 3y.$$

Solución

El primer paso consiste en expresar el sistema en notación de operadores

$$\begin{matrix} y' = 2x \\ x' = 3y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} Dy = 2x, \\ Dx = 3y, \end{matrix}$$

o bien como $\quad Dy - 2x = 0\,, \qquad (5.1)$

$$Dx - 3y = 0\,, \qquad (5.2)$$

Procedamos por eliminación. Apliquemos D a la ecuación (5.1)

$$D(Dy) - 2Dx = 0 \Rightarrow D^2y - 2Dx = 0\,, \qquad (5.3)$$

multipliquemos por (-2) a (5.2)

$$-2Dx + 6y = 0\,, \qquad (5.4)$$

restemos las ecuaciones (5.3) y (5.4)

$$D^2y - 2Dx + 2Dx - 6y = 0 \Rightarrow D^2y - 6y = 0\,,$$

ahora, la ecuación característica de esta expresión es $m^2 - 6 = 0$ cuyas raíces son $m_1 = \sqrt{6}$ y $m_2 = -\sqrt{6}$ y obtenemos

$$y(t) = c_1e^{\sqrt{6}t} + c_2e^{-\sqrt{6}t}\,. \qquad (5.5)$$

Realicemos el mismo procedimiento para encontrar $x(t)$.

Multipliquemos por (-3) la ecuación (5.1)

$$-3Dy + 6x = 0\,, \tag{5.6}$$

apliquemos D a (5.2)

$$Dx - 3y = 0 \Rightarrow D^2 x - 3Dy = 0\,, \tag{5.7}$$

restando (5.6) y (5.7), resulta

$$-3Dy + 6x - D^2 x + 3Dy = 0 \Rightarrow 6x - D^2 x = 0 \Rightarrow -6x + D^2 x = 0\,,$$

la ecuación característica es $m^2 - 6 = 0$ cuyas raíces son $m_1 = \sqrt{6}$ y $m_2 = -\sqrt{6}$ y obtenemos

$$x(t) = c_3 e^{\sqrt{6}t} + c_4 e^{-\sqrt{6}t}\,, \tag{5.8}$$

el siguiente paso es sustituir las ecuaciones (5.5) y (5.8) digamos en la primera ecuación del sistema original, es decir en la expresión $Dy = 2x$

$$Dy = 2x \Rightarrow D\left(c_1 e^{\sqrt{6}t} + c_2 e^{-\sqrt{6}t}\right) = 2\left(c_3 e^{\sqrt{6}t} + c_4 e^{-\sqrt{6}t}\right),$$

simplificando

$$D\left(c_1 e^{\sqrt{6}t} + c_2 e^{-\sqrt{6}t}\right) - 2\left(c_3 e^{\sqrt{6}t} + c_4 e^{-\sqrt{6}t}\right) = 0\,,$$

$$\sqrt{6}c_1 e^{\sqrt{6}t} - \sqrt{6}c_2 e^{-\sqrt{6}t} - 2c_3 e^{\sqrt{6}t} - 2c_4 e^{\sqrt{6}t} = 0\,,$$

$$\left(\sqrt{6}c_1 - 2c_3\right)e^{\sqrt{6}t} + \left(-\sqrt{6}c_2 - 2c_4\right)e^{-\sqrt{6}t} = 0\,,$$

de aquí se deducen las igualdades

$$\sqrt{6}c_1 - 2c_3 = 0 \quad \text{y} \quad -\sqrt{6}c_2 - 2c_4 = 0\,,$$

despejando c_3 y c_4, respectivamente

$$c_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}c_1,\quad c_4 = \frac{\sqrt{6}}{2}c_2\,,$$

por lo tanto una solución del sistema será

$$y(t) = c_1 e^{\sqrt{6}t} + c_2 e^{-\sqrt{6}t} \quad \& \quad x(t) = \frac{\sqrt{6}}{2}c_1 e^{\sqrt{6}t} + \frac{\sqrt{6}}{2}c_2 e^{-\sqrt{6}t}\,.$$

Ejercicio62

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left(x_1'' + x_1' - x_1\right) + \left(x_2'' - 3x_2' + 2x_2\right) = 0\,,$$

$\left(x_1' + 2x_1\right) + \left(2x_2' - 4x_2\right) = 0\,.$

Solución

El primer paso consiste en expresar el sistema en notación de operadores

$$\left(D^2 + D - 1\right)x_1 + \left(D^2 - 3D + 2\right)x_2 = 0\,, \tag{5.9}$$

$$\left(D + 2\right)x_1 + \left(2D - 4\right)x_2 = 0\,, \tag{5.10}$$

Procedamos por eliminación. Apliquemos $-\left(D + 2\right)$ a la ecuación (5.9)

$$-\left(D + 2\right)\left(D^2 + D - 1\right)x_1 - \left(D + 2\right)\left(D^2 - 3D + 2\right)x_2 = 0\,, \tag{5.11}$$

Apliquemos $D^2 + D - 1$ a la ecuación (5.10)

$$\left(D^2 + D - 1\right)\left(D + 2\right)x_1 + \left(D^2 + D - 1\right)\left(2D - 4\right)x_2 = 0\,, \tag{5.12}$$

Restando (5.11) y (5.12), tenemos

$$-\left(D + 2\right)\left(D^2 + D - 1\right)x_1 - \left(D + 2\right)\left(D^2 - 3D + 2\right)x_2 + \left(D^2 + D - 1\right)\left(D + 2\right)x_1 +$$
$$\left(D^2 + D - 1\right)\left(2D - 4\right)x_2 = 0,$$

$$-\left(D + 2\right)\left(D^2 - 3D + 2\right)x_2 + \left(D^2 + D - 1\right)\left(2D - 4\right)x_2 = 0\,,$$

$$\left(-D^3 + 3D^2 - 2D - 2D^2 + 6D - 4\right)x_2 + \left(2D^3 - 4D^2 + 2D^2 - 4D - 2D + 4\right)x_2 = 0\,,$$

$$\left(D^3 - D^2 - 2D\right)x_2 = 0\,, \tag{5.13}$$

ahora, la ecuación característica de esta expresión es

$$m^3 - m^2 - 2m = 0\,,$$

$$m\left(m^2 - m - 2\right) = 0\,,$$

implica que $m_1 = 0$, ahora solo nos falta encontrar el valor de las dos raíces de la ecuación

$$m^2 - m - 2 = 0\,,$$

y estas son $r_2 = 2, r_3 = -1$

asi que
$$x_2 = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t}\,, \tag{5.14}$$

Para encontrar x_1 realizamos un procedimiento semejante. Un método alternativo es sustituir (5.14) en $\left(x_1' + 2x_1\right) + \left(2x_2' - 4x_2\right) = 0$ y tenemos

$$x_2 = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t} \Rightarrow x_2' = 2c_2 e^{2t} - c_3 e^{-t} \,,$$

$$2t \;\Rightarrow \left(x_1' + 2x_1\right) + \left(4c_2 e^{2t} - 2c_3 e^{-t} - 4c_1 - 4c_2 e^{2t} - 4c_3 e^{-t}\right) = 0 \,,$$

$$x_1' + 2x_1 = 6c_3 e^{-t} + 4c_1 \;, \tag{5.15}$$

resolvamos la ecuación lineal. El factor integrante es

$$\int \frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = 2\int dt \Rightarrow ln\,\mu(t) = 2t \;,$$

$$\mu(t) = e^{2t} \,,$$

multiplicando la ecuación (5.15) por este factor, obtenemos

$$e^{2t}\,\frac{dx_1}{dt} + 2e^{2t} x_1 = 6c_3 e^{t} + 4c_1 e^{2t} \,,$$

$$\left(e^{2t} x_1\right)' = 4c_1 e^{2t} + 6c_3 e^{t} \,,$$

integrando

$$\int \left(e^{2t} x_1\right)' = 4\int c_1 e^{2t} dt + 6\int c_3 e^{t} dt \;,$$

$$e^{2t} x_1 = 2c_1 e^{2t} + 6c_3 e^{t} dt + c_4 \,,$$

$$x_1 = 2c_1 + 6c_3 e^{-t} + c_4 e^{-2t} \;. \tag{5.16}$$

La solución del sistema esta dado por la ecuaciones (5.14) y (5.16).

Ejercicio63

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x_1' = x_1 + 2x_2 \,,$$

$$x_2' = 4x_1 + 3x_2 \,.$$

Solución

Expresemos el sistema en notación de operadores

$$(D-1)x_1 + 2x_2 = 0 \,, \tag{5.17}$$

$$(D-3)x_2 - 4x_1 = 0 \,, \tag{5.18}$$

Apliquemos $-(D-3)$ a la ecuación (5.17) y multipliquemos por 2 a (5.18)

$$-(D-3)(D-1)x_1 - 2(D-3)x_2 = 0 \,,$$

$$2(D-3)x_2 - 8x_1 = 0\,,$$

sumando estas dos expresiones tenemos

$$-(D-3)(D-1)x_1 - 2(D-3)x_2 + 2(D-3)x_2 - 8x_1 = -(D-3)(D-1)x_1 - 8x_1 = 0\,,$$

simplificando

$$-(D-3)(D-1)x_1 - 8x_1 = -D^2x_1 + 4Dx_1 - 3x_1 - 8x_1 = \left(-D^2 + 4D - 11\right)x_1 = 0\,,$$

o multiplicando por (-1) $\left(D^2 - 4D + 11\right)x_1 = 0\,,$

ahora, la ecuación característica de esta expresión es

$$m^2 - 4m + 11 = 0\,,$$

cuyas raíces complejas son $x_1 = 1 + 7i$ & $x_1 = 1 - 7i$, entonces

$$x_1 = e^x\left(c_1 \cos 7x + c_2 sen 7x\right), \qquad (5.19)$$

para encontrar x_2 procedemos de manera similar. Apliquemos $(D-1)$ a la ecuación (5.18) y multipliquemos por 4 a (5.17)

$$4(D-1)x_1 + 8x_2 = 0\,,$$

$$(D-1)(D-3)x_2 - 4(D-1)x_1 = 0\,,$$

sumando ambas expresiones tenemos

$$(D-1)(D-3)x_2 - 4(D-1)x_1 + 4(D-1)x_1 + 8x_2 = (D-1)(D-3)x_2 + 8x_2 = \left(D^2 - 4D + 11\right)x_2 = 0\,,$$

la ecuación característica de esta expresión es

$$m^2 - 4m + 11 = 0\,,$$

siendo la misma para x_1, entonces la solución x_2 será

$$x_2 = e^x\left(c_3 \cos 7x + c_4 sen 7x\right). \qquad (5.20)$$

las ecuaciones (5.19) y (5.20) forman las soluciones del sistema.

5.3 SOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES POR LA MATRIZ EXPONENCIAL

Antes de proceder con la descripción del método es conveniente recordar la definición de la exponencial de una matriz. Tal definición está estrechamente ligada con la expansión en series de la función exponencial dada como

$$e^{at} = 1 + at + a^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + a^n\frac{t^n}{n!} + \cdots + = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\frac{t^n}{n!}.$$

Por simplicidad consideraremos una matriz cuadrada *A* de tamaño $n \times n$. Entonces definimos

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + A^n\frac{t^n}{n!} + \cdots + = \sum_{n=0}^{\infty} A^n\frac{t^n}{n!}. \quad (5.21)$$

En la práctica, podemos utilizar la expresión

$$e^{At} = Te^{Dt}T^{-1}. \quad (5.22)$$

donde *D* es la matriz diagonal de *A*.

Nota : Para obtener la exponencial de una matriz debemos calcular los valores propios de A para formar la matriz diagonal D y los vectores propios para formar la matriz T conviene repasar este tema del curso de algebra lineal.

Ejercicio64

Determinar e^{At} ***si***

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución

El primer paso es encontrar los valores y vectores propios de *A*.Los valores propios se obtienen de la ecuación $det(A - \lambda I) = 0$, donde *I* es la matriz identidad

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

$$det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+3\lambda+2=0\,,$$

al aplicar división sintética las raíces son $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-1$ y $\lambda_3=-1$. Para encontrar los eigenvectores sustituimos cada valor de λ en

$$\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

Para $\lambda_1=2\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

efectuando operaciones elementales entre filas tenemos

$$\begin{pmatrix}-2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

por lo tanto $\quad 2x_1-x_2-x_3=0\Rightarrow x_1=\frac{1}{2}(x_2+x_3)$,

$x_2-x_3=0\Rightarrow x_2=x_3$,

una solución del sistema de ecuaciones puede ser $x_3=1$, $x_2=1$ y $x_1=1$. El primer eingenvector seria

$$\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},$$

para $\lambda_2=-1$ y $\lambda_3=-1$, tenemos

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

de aquí se deduce que $\quad x_1+x_2+x_3=0$,

asignando valores arbitrarios digamos $x_1=1$, $x_2=0$, implica $x_3=-1$

y el segundo eigenvector es

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

similarmente si $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, entonces $x_3 = -1$ y

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

una vez conocidos los valores propios de A podemos establecer la matriz diagonal D de la siguiente manera

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

asi que

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

y de los vectores propios formamos la matriz T

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

ahora tenemos que hallar T^{-1} formando la matriz aumentada denotada por $T|I$ donde I es la matriz identidad

$$T|I = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

entonces

$$T|I = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \; f2 \leftrightarrow f3 \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) - f2 + f1 \rightarrow f2,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & \vdots 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} f1 - f3 \to f3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \vdots 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} f1 - f3 \to f1,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} f2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & \vdots 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} f2 - f3 \leftarrow f3,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & \vdots & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 3/2 & \vdots & -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \frac{2}{3} f2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & \vdots & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} f1 - f3 \to f1,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 & \vdots 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} f2 - \frac{1}{2} f3 \to f2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 5/6 & -2/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

por lo tanto

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 5/6 & -2/3 & -1/6 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix},$$

Finalmente

$$e^{At} = Te^{Dt}T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 5/6 & -2/3 & -1/6 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Podemos establecer la siguiente proposición

La solución de un sistema de ecuaciones $Y' = AY$***, sujeta a la condición inicial*** $Y(0) = Y_0$ ***es simplemente***

$$Y = e^{At}Y_0 . \tag{5.23}$$

Ejercicio65

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$Y' = AY\,, \quad Y(0) = Y_0\,.$$

donde
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solución

Obtengamos la exponencial de la matriz *A*. Para ello, tenemos que determinar sus valores propios

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix},$$

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 12 = 0\,,$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 6 = (\lambda - 6)(\lambda + 1) = 0\,,$$

los valores propios son $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1$. Los vectores propios se determinan del sistema

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Para $\lambda_1 = 6$, tenemos

$$\begin{pmatrix} 3-6 & 4 \\ 3 & 2-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$-3y_1 + 4y_2 = 0\,,$$

$$3y_1 - 4y_2 = 0\,,$$

proponemos los valores $y_1 = 4$, $y_2 = 3$, entonces el primer vector propio será

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

para $\lambda_2 = -1$, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$4y_1 + 4y_2 = 0,$$

$$3y_1 + 3y_2 = 0,$$

si $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, el segundo vector propio es

$$\boldsymbol{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

una vez conocidos los valores propios de A podemos establecer la matriz diagonal D de la siguiente manera

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

y de los vectores propios formamos la matriz T

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

ahora tenemos que hallar T^{-1} formando la matriz aumentada denotada por $T|I$ donde I es la matriz identidad

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & \vdots & 1 & 0 \\ 3 & -1 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

efectuando operaciones elementales tenemos

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & \vdots & 1 & 0 \\ 3 & -1 & \vdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & \vdots & 1/4 & 0 \\ 1 & -1/3 & \vdots & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & \vdots & 1/4 & 0 \\ 0 & 7/12 & \vdots & 1/4 & -1/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & \vdots & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 3/7 & -4/7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & \vdots & 3/7 & -4/7 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 \\ 3/7 & -4/7 \end{pmatrix},$$

entonces

$$e^{At} = Te^{Dt}T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 \\ 3/7 & -4/7 \end{pmatrix},$$

y la solución del sistema es

$$Y = e^{At}Y_0 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/7 & 1/7 \\ 3/7 & -4/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{6t} + 2e^{-t} \\ 3e^{6t} - 2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Ejercicio66

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$Y' = AY\,,\quad Y(0) = Y_0\,.$$

donde
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad Y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Solución

Podemos usar la definición

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + A^n\frac{t^n}{n!} + \cdots + = \sum_{n=0}^{\infty} A^n\frac{t^n}{n!},$$

como A es de tamaño $3\times 3 \Rightarrow n = 3$

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{3} A^n\frac{t^n}{n!} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!},$$

como

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$A^3 = O$, donde O es la matriz cero, entonces

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & t \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t & t + t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la solución del sistema es

$$Y = e^{At}Y_0 = \begin{pmatrix} 1 & t & t+t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+5t+2t^2 \\ 1+4t \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio67

Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$Y' = AY\,, \quad Y(0) = Y_0\,.$$

donde
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solución

como A es de tamaño 3×3, $n = 3$

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{3} A^n \frac{t^n}{n!} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!}\,,$$

luego

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A$$

así que

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & t & t \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} t^2 & t^2 & t^2 \\ 0 & 0 & -t^2 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} t^3 & t^3 & t^3 \\ 0 & 0 & t^3 \\ 0 & 0 & -t^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+t+t^2/2+t^3/6 & t+t^2/2+t^3/6 & t+t^2/2+t^3/6 \\ 0 & 1 & t-t^2/2+t^3/6 \\ 0 & 0 & 1+t+t^2/2-t^3/6 \end{pmatrix},$$

la solución del sistema es

$$Y = e^{At}Y_0 = \begin{pmatrix} 1+t+t^2/2+t^3/6 & t+t^2/2+t^3/6 & t+t^2/2+t^3/6 \\ 0 & 1 & t-t^2/2+t^3/6 \\ 0 & 0 & 1+t+t^2/2-t^3/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1+3t+3t^2/2+t^3/2 \\ 1+t-t^2/2+t^3/6 \\ 1+t+t^2/2-t^3/6 \end{pmatrix}.$$

UNIDAD 6

TRANSFORMADA DE LAPLACE

6.1 CONCEPTOS

Definición 6.1

Dada una función $f(t)$ definida para toda $t \geq 0$, la transformada de Laplace de $f(t)$ denotada por el símbolo $\Im\{f(t)\}$, es la función $F(s)$ definida como

$$\Im\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \qquad \textbf{(6.1)}$$

Para todo valor de s en los cuales la integral impropia converge.

La integral en (6.1) es una integral impropia. De la asignatura de cálculo aprendimos que una integral impropia en un intervalo infinito está definida como el límite de la integral en el intervalo acotado; esto es

$$\int_a^{\infty} g(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} g(t)dt\,. \qquad (6.2)$$

Si el límite existe, entonces la integral converge, de otra manera diverge o no existe. La expresión (6.2) proporciona la técnica para evaluar integrales impropias.

Teorema 6.1 LINEALIDAD DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Si a y b son constantes, entonces

$$\Im\{af(t) + bg(t)\} = a\Im\{f(t)\} + b\Im\{g(t)\}\,. \qquad (6.3)$$

Ejercicio68

Hallar la transformada de Laplace de

a) $f(t) = 1$, ***para*** $t \geq 0$

b) $f(t)=t$.

Solución

a) Usemos la definición $F=\Im\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$,

$$\Im\{f(t)\}=\Im\{1\}=\int_0^\infty e^{-st}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}dt=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-sb}+\frac{1}{s}\right]=-\frac{1}{s}e^{-s(\infty)}+\frac{1}{s}=\frac{1}{s}.$$

b) $\Im\{f(t)\}=\Im\{t\}=\int_0^\infty e^{-st}tdt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}tdt=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{t}{s}e^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-sb}-\frac{p}{s}e^{-sb}\right)$

$=\frac{1}{s^2}$. si $s>0$

En este caso $\int te^{-st}dt$ se resolvió por partes.

Ejercicio69

Obtener la transformada de Laplace, si $f(t)=e^{at}$ ***, para*** $t\geq 0$

Solución

$$\Im\{f(t)\}=\Im\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}e^{at}dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(s-a)t}dt=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s-a}e^{-sb}+\frac{1}{s-a}\right]=\frac{1}{s-a}.$$

Ejercicio70

Obtener la transformada de Laplace de

a) $f(t)=sen(at)$,

b) $f(t)=cos(at)$,

Solución

a) $\Im\{sen\,at\}=\int_0^\infty e^{-st}sen\,at\,dt=\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-st}sen\,at\,dt$, aplicando la identidad trigonométrica

$$\int e^{at}sen\beta t dt=\frac{e^{at}(asen\beta t-\beta\cos\beta t)}{a^2+\beta^2},$$

obtenemos

$$\Im\{sen\,at\} = \lim_{p\to\infty}\left[\frac{e^{-st}\left(-s\,sen\,at - a\cos at\right)}{s^2+a^2}\right]_0^p = \lim_{p\to\infty}\left\{\frac{a}{s^2+a^2} - \frac{e^{-sp}\left(-s\,sen\,ap - a\cos ap\right)}{s^2+a^2}\right\},$$

$$= \frac{a}{s^2+a^2}\,.$$

b) $\Im\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt = \lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-st}\cos at\,dt$, aplicando la identidad trigonométrica

$$\int e^{at}\cos\beta t dt = \frac{e^{at}\left(a sen\beta t + \beta\cos\beta t\right)}{a^2+\beta^2},$$

$$\Im\{\cos at\} = \lim_{p\to\infty}\left[\frac{e^{-st}\left(-s\cos at - a sen\,at\right)}{s^2+a^2}\right]_0^p = \lim_{p\to\infty}\left\{\frac{s}{s^2+a^2} - \frac{e^{-sp}\left(-s\cos ap - a sen\,ap\right)}{s^2+a^2}\right\},$$

$$= \frac{s}{s^2+a^2}\,.$$

DEFINICION 6.2 FUNCION GAMMA

La función gamma $\Gamma(x)$, está definida para $x > 0$ por la formula

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt\,. \qquad (6.4)$$

Algunas propiedades de la función gamma son

1. $\Gamma(1) = 1$.
2. $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$.
3. $\Gamma(x+1) = x!$, para todo entero positivo n
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

La función gamma nos ayuda a calcular la transformada de Laplace de funciones del tipo

$$f(t) = t^a\,.$$

Donde a es real y $a > -1$, usando la siguiente relación

$$\Im\{t^a\} = \int_0^\infty e^{-st}t^a dt\,.$$

Realizando el cambio de variable $u = st \Rightarrow t = u/s \Rightarrow dt = du/s$, la integral se transforma en

$$\Im\{t^a\} = \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^a du = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}. \tag{6.5}$$

Para toda $s > 0$. Aplicando la propiedad 3 de la función gamma, tenemos

$$\Im\{t^a\} = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} = \frac{n!}{s^{a+1}}. \tag{6.6}$$

Ejercicio71

Obtener la transformada de Laplace de las siguientes funciones usando la función gamma

1. $f(t) = t$.

2. $f(t) = t^2$.

3. $f(t) = t^3$.

Solución

1. $\Im\{t\} = \dfrac{\Gamma(1+1)}{s^{1+1}} = \dfrac{1!}{s^{1+1}} = \dfrac{1}{s^2}$,

2. $\Im\{t^2\} = \dfrac{\Gamma(2+1)}{s^{2+1}} = \dfrac{2!}{s^{2+1}} = \dfrac{2}{s^3}$,

3. $\Im\{t^3\} = \dfrac{\Gamma(3+1)}{s^{3+1}} = \dfrac{3!}{s^{3+1}} = \dfrac{6}{s^4}$.

Ejercicio72

Calcular $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$.

Solución

Por la propiedad 2, observemos que

$$\frac{5}{2} = 1 + x \Rightarrow x = \frac{3}{2},$$

Entonces, $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

Similarmente $$\frac{3}{2} = 1 + x \Rightarrow x = \frac{1}{2},$$

y

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

De la propiedad 4

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\ .$$

Ejercicio73

Obtener $\Im\left\{3t^2+4t^{3/2}\right\}$.

Solución

Primero aplicamos la formula (6.3)

$$\Im\left\{3t^2+4t^{3/2}\right\}=\Im\left\{3t^2\right\}+\Im\left\{4t^{3/2}\right\},$$

Por (6.6)

$$\Im\left\{3t^2\right\}=3\cdot\frac{2!}{s^3},$$

y de (6.5)

$$\Im\left\{4t^{3/2}\right\}=4\Im\left\{t^{3/2}\right\}=4\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{s^{3/2+1}}=4\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{5/2}}=4\frac{3/4}{s^{5/2}}\sqrt{\pi}=3\sqrt{\frac{\pi}{s^5}}\ ,$$

Entonces

$$\Im\left\{3t^2+4t^{3/2}\right\}=\Im\left\{3t^2\right\}+\Im\left\{4t^{3/2}\right\}=\frac{6}{s^3}+3\sqrt{\frac{\pi}{s^5}}\ .$$

Ejercicio74

Demostrar el teorema de linealidad, es decir probar que

$$\Im\{af(t)+bg(t)\}=a\Im\{f(t)\}+b\Im\{g(t)\}.$$

y generalice este resultado a n- funciones.

Solución

Sean

$$\Im\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\quad\text{y}\quad\Im\{g(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt,$$

si a, b son constantes cualesquiera, entonces

$$\Im\{af(t)+bg(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\left(af(t)+bg(t)\right)dt=a\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt+b\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt,$$

$$\Im\{af(t)+bg(t)\}=a\Im\{f(t)\}+b\Im\{g(t)\}.$$

Sin embargo este resultado puede generalizarse. Si $f_1(t), f_2(t),\cdots, f_n(t)$ son n funciones y $c_1, c_2, \cdots, c_n$ son constantes, entonces

$$\Im\{f_1(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f_1(t)dt,\quad \Im\{f_2(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f_2(t)dt,\ \ldots,\ \Im\{f_n(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f_n(t)dt,$$

$$,\Im\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)+\cdots+c_nf_n(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\left(c_1f_1(t)+c_2f_2(t)+\cdots+c_nf_n(t)\right)dt$$

$$=c_1\int_0^\infty e^{-st}f_1(t)dt+c_2\int_0^\infty e^{-st}f_2(t)dt+\cdots+c_n\int_0^\infty e^{-st}f_n(t)dt$$

$$\Im\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)+\cdots+c_nf_n(t)\}=c_1\Im\{f_1(t)\}+c_2\Im\{f_2(t)\}+\cdots+c_n\Im\{f_n(t)\}.$$

En la tabla 6.1 se indican las transformadas de las funciones más comúnmente empleadas

Ejercicio75

Obtener $\Im\left\{3e^{2t}+2sen^2 3t\right\}$.

Solución

$$\Im\left\{3e^{2t}+2sen^2 3t\right\}=\Im\left\{3e^{2t}\right\}+\Im\left\{2sen^2 3t\right\}$$
$$=\Im\left\{3e^{2t}\right\}+\Im\{1-\cos 6t\}$$

$=\Im\left\{3e^{2t}\right\}+\Im\{1\}-\Im\{\cos 6t\}$,

por la tabla 6.1

$$\Im\left\{3e^{2t}\right\}=\frac{3}{s-2},$$

$$\Im\{1\}=\frac{1}{s},$$

$$\Im\{\cos 6t\}=\frac{s}{s^2+36},$$

Entonces

$$\Im\left\{3e^{2t}+2sen^2 3t\right\}=\frac{3}{s-2}+\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+36}$$

$$=\frac{3s^3+144s-72}{s(s-2)(s^2+36)} \quad \text{, para } s>0.$$

Ejercicio76

Obtener

a) $\Im\left\{t^3e^{-3t}\right\}$.

b) $\Im\left\{e^{-t}\cos 2t\right\}$.

c) $\Im\left\{e^{-4t}\cosh 2t\right\}$.

d) $\Im\left\{e^{-t}\left(3senh\, 2t-5\cosh 2t\right)\right\}$.

e) $\Im\left\{e^{2t}\left(3sen\, 4t-4\cos 4t\right)\right\}$.

Solución

a) Podemos usar las formulas $\Im\left\{\dfrac{t^{n-1}e^{at}}{\Gamma(n)}\right\}=\dfrac{1}{(s-a)^n}$ y $\Gamma(x+1)=x!$

$$\Im\left\{t^3e^{-3t}\right\}=\Im\left\{\Gamma(4)\frac{t^3e^{-3t}}{\Gamma(4)}\right\}=\frac{3!}{(s+3)^4}=\frac{6}{(s+3)^4}.$$

b) Para determinar $\Im\left\{e^{-t}\cos 2t\right\}$ utilizaremos la formula de la tabla

$$\Im\left\{e^{at}\cos kt\right\}=\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2},$$

en este caso $a=-1$ y $k=2$, así que

$$\Im\left\{e^{-t}\cos 2t\right\}=\frac{s+1}{(s+1)^2+4}=\frac{s+1}{s^2+2s+5}.$$

c) Utilicemos la expresión

$$\Im\left\{e^{at}\cosh kt\right\}=\frac{s-a}{(s-a)^2-k^2},$$

aquí, $a=-4$ y $k=2$, entonces

$$\Im\left\{e^{-4t}\cosh 2t\right\}=\frac{s+4}{(s+4)^2-4}=\frac{s+4}{s^2+8s+12}.$$

d) Aplicando la propiedad de linealidad tenemos

$$\Im\left\{e^{-t}\left(3senh\, 2t-5\cosh 2t\right)\right\}=3\Im\left\{e^{-t}senh 2t\right\}-5\Im\left\{e^{-t}\cosh 2t\right\},$$

ahora bien,

$$3\Im\left\{e^{-t} senh 2t\right\} = 3(2)\Im\left\{\frac{1}{2}e^{-t} senh 2t\right\} = \frac{6}{(s+1)^2 - 4} = \frac{6}{s^2 + 2s - 3},$$

dado que $\frac{1}{k}e^{at} senh\, kt = \frac{1}{(s-a)^2 - k^2}$,

$$5\Im\left\{e^{-t} \cosh 2t\right\} = \frac{5s+5}{(s+1)^2 - 4} = \frac{5s+5}{s^2 + 2s - 3},$$

por lo tanto

$$\Im\left\{e^{-t}(3senh\, 2t - 5\cosh 2t)\right\} = \frac{6}{s^2 + 2s - 3} - \frac{5+5s}{s^2 + 2s - 3} = \frac{1-5s}{s^2 + 2s - 3}.$$

*e)*Aplicando la propiedad de linealidad tenemos

$$\Im\left\{e^{2t}(3sen\, 4t - 4\cos 4t)\right\} = 3\Im\left\{e^{2t} sen\, 4t\right\} - 4\Im\left\{e^{2t} \cos 4t\right\},$$

de la formula

$$\Im\left\{e^{at} sen\, kt\right\} = \frac{k}{(s-a)^2 + k^2},$$

tenemos

$$3\Im\left\{e^{2t} sen\, 4t\right\} = \frac{12}{(s-2)^2 + 16} = \frac{12}{s^2 - 2s + 20},$$

y

$$4\Im\left\{e^{2t} \cos 4t\right\} = \frac{4s-16}{(s-2)^2 + 4^2} = \frac{4s-16}{s^2 - 2s + 20},$$

entonces

$$\Im\left\{e^{2t}(3sen\, 3t - 4\cos 4t)\right\} = \frac{12}{s^2 - 2s + 20} - \frac{4s-16}{s^2 - 2s + 20} = \frac{28-4s}{s^2 - 2s + 20}.$$

FUNCION	*TRANSFORMADA*	FUNCION	*TRANSFORMADA*
$f(t)$	$F(s)$	t^a	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bF(s)$	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$	$senkt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$	$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$	$senh\,kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	$e^{at}\cos kt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
$u(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	$e^{at}senkt$	$\frac{k}{(s-a)^2+k^2}$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	$\frac{1}{2k^3}(senkt-kt\cos kt)$	$\frac{1}{(s^2+k^2)^2}$
$tf(t)$	$-F'(s)$	$\frac{1}{2k}(senkt+kt\cos kt)$	$\frac{s^2}{(s^2+k^2)^2}$
$t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(s)$	$\frac{t}{2k}senkt$	$\frac{s}{(s^2+k^2)^2}$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$f(t)$, periodo p	$\frac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p e^{-st}f(t)dt$	$\delta(t-a)$	e^{-as}

1	$\frac{1}{s}$	$(-1)^{\lVert t/a \rVert}$ Onda cuadrada	$\frac{1}{s}\tanh\frac{as}{2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\left\lVert \frac{t}{a} \right\rVert$	$\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$
t^n	$\frac{n!}{s^{a+1}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$

Tabla 6.1 Transformadas de Laplace

6.2 TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

DEFINICION 6.3

Si $F(s)=\Im\{f(t)\}$, llamamos a $f(t)$ la transformada inversa de Laplace de $F(s)$, y se escribe como

$$f(t)=\Im^{-1}\{F(s)\}. \tag{6.7}$$

Cuando la función F es de la forma

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}. \tag{6.8}$$

La técnica para encontrar $\Im^{-1}$ de (6.8) se basa en el método de fracciones parciales. Describiremos de manera breve dos reglas sobre la descomposición en fracciones parciales de F en términos de la factorización del denominador $Q(s)$ en factores lineales y factores cuadráticos irreducibles correspondientes a ceros reales y complejos, respectivamente, de $Q(s)$.

REGLA 1 FRACCIONES PARCIALES EN FACTORES LINEALES

La parte de la descomposición de la fracción parcial de F correspondiente al factor lineal $s-a$ *de multiplicidad n, es una suma de n fracciones parciales que tienen la forma*

$$\frac{A_1}{s-a}+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(s-a)^n}. \tag{6.9}$$

donde $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *son constantes.*

REGLA 2 FRACCIONES PARCIALES EN FACTORES CUADRATICOS

La parte de la descomposición de la fracción parcial de F correspondiente al factor cuadrático $(s-a)^2+b^2$ *de multiplicidad n, es una suma de n fracciones parciales que tienen la forma*

$$\frac{A_1 s + B_1}{(s-a)^2 + b^2} + \frac{A_2 s + B_2}{\left[(s-a)^2 + b^2\right]^2} + \cdots + \frac{A_2 s + B_2}{\left[(s-a)^2 + b^2\right]^n} .(6.10)$$

donde $A_1, A_2, \cdots, A_n$ *y* $B_1, B_2, \cdots, B_n$ *son constantes*

Para encontrar $\Im^{-1}\{F(s)\}$ donde F es de la forma de (6.8) se necesitan dos pasos. Primero obtenemos la descomposición de fracciones parciales y luego determinamos la transformada inversa de Laplace de cada una de las fracciones parciales individuales.

Ejercicio77

Encontrar la transformada inversa de Laplace de

a) $F(s) = \dfrac{6s-4}{s^3 - 4s + 20}$.

b) $F(s) = \dfrac{4s+12}{s^3 + 8s + 16}$.

c) $F(s) = \dfrac{3s+7}{s^3 - 2s - 3}$.

d) $F(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2s+3}}$.

Solución

a) $\Im^{-1}\left\{\dfrac{6s-4}{s^3-4s+20}\right\} = \Im^{-1}\left\{\dfrac{6s-4}{(s-2)^2+16}\right\} = \Im^{-1}\left\{\dfrac{6(s-2)+8}{(s-2)^2+16}\right\},$

$\Im^{-1}\left\{\dfrac{6(s-2)+8}{(s-2)^2+16}\right\} = 6\Im^{-1}\left\{\dfrac{s-2}{(s-2)^2+16}\right\} + 2\Im^{-1}\left\{\dfrac{4}{(s-2)^2+16}\right\},$

$= 6e^{2t}\cos 4t + 2e^{2t} sen\, 4t$.

b) $\Im^{-1}\left\{\dfrac{4s+12}{s^3+8s+16}\right\} = \Im^{-1}\left\{\dfrac{4s+12}{(s+4)^2}\right\} = \Im^{-1}\left\{\dfrac{4(s+4)^2-4}{(s+4)^2}\right\},$

$\Im^{-1}\left\{\dfrac{4(s+4)^2-4}{(s+4)^2}\right\} = 4\Im^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+4)}\right\} - 4\Im^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+4)^2}\right\},$

$= 4e^{-4t} - 4te^{-4t}$.

c) $\mathfrak{I}^{-1}\left\{\dfrac{3s+7}{s^3-2s-3}\right\}=\mathfrak{I}^{-1}\left\{\dfrac{3s+7}{(s-1)^2-4}\right\}=\mathfrak{I}^{-1}\left\{\dfrac{3(s-1)+10}{(s-1)^2-4}\right\},$

$$\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{3(s-1)+10}{(s-1)^2-4}\right\}=3\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2-4}\right\}+5\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2-4}\right\},$$

$$=3e^t\cosh 2t+5e^t\operatorname{senh}2t\ ,$$

$$=e^t\left(3\cosh 2t+5\operatorname{senh}2t\right)=4e^{3t}-e^{-t}.$$

d) $\mathfrak{I}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2s+3}}\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathfrak{I}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+3/2)^{1/2}}\right\},$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-3t/2}\frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^{-1/2}e^{-3t/2}.$$

Ejercicio78

Encontrar la transformada inversa de Laplace de

a) $F(s)=\dfrac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1}.$

b) $F(s)=\dfrac{e^{4-3s}}{(s+4)^{5/2}}.$

Solución

a)Por un lado

$$\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{(s+1)}{s^2+s+1}\right\}=\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1/2)^2+3/4}\right\}=\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{s+1/2+1/2}{(s+1/2)^2+3/4}\right\},$$

$$=\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+3/4}\right\}+\frac{1}{\sqrt{3}}\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}/2}{(s+1/2)^2+3/4}\right\},$$

$$=e^{-t/2}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}t}{2},$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}t}{2}+\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}t}{2}\right),$$

asi que

$$\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right\}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-(t-\pi)/2}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)+sen\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\right) & t>\pi\\ 0 & t<\pi,\end{cases}$$

$$\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right\}=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-(t-\pi)/2}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)+sen\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\right)u(t-\pi).$$

b) $\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^{5/2}}\right\}=e^{-4t}\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{5/2}}\right\}=e^{-4t}\frac{t^{3/2}}{\Gamma(5/2)}=\frac{4t^{3/2}e^{-4t}}{3\sqrt{\pi}}$,

luego $\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{e^{4-3s}}{(s+4)^{5/2}}\right\}=e^{4}\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s+4)^{5/2}}\right\}$,

$$\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{e^{4-3s}}{(s+4)^{5/2}}\right\}=\begin{cases}\frac{4e^4(t-3)^{3/2}e^{-4(t-3)}}{3\sqrt{\pi}} & t>3\\ 0 & t<3,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{4(t-3)^{3/2}e^{-4(t-4)}}{3\sqrt{\pi}} & t>3\\ 0 & t<3,\end{cases}$$

$$=\frac{4(t-3)^{3/2}e^{-4(t-4)}}{3\sqrt{\pi}}u(t-3).$$

Ejercicio79

Encontrar la transformada inversa de Laplace de $F(s)=\dfrac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s}$.

Solución

Factorizando el denominador, tenemos

$$Q(s)=s^3-2s^2-8s=s(s^2-2s-8)=s(s+2)(s-4),$$

En consecuencia

$$\frac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s-4},$$

$$s^2+1=A(s+2)(s-4)+Bs(s-4)+Cs(s+2),$$

Proponiendo los valores de $s = 0, -2, 4$, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$1 = -8A,$$

$$5 = 12B,$$

$$17 = 24C,$$

Por tanto $A = -\frac{1}{8}$, $B = \frac{5}{12}$ y $C = \frac{17}{24}$, de manera que

$$\frac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s} = -\frac{1}{8s} + \frac{5}{12(s+2)} + \frac{17}{24(s-4)},$$

Entonces

$$\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s}\right\} = \mathfrak{I}^{-1}\left\{-\frac{1}{8s}\right\} + \mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{5}{12(s+2)}\right\} + \mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{17}{24(s-4)}\right\},$$

$$= -\frac{1}{8}\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{5}{12}\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)}\right\} + \frac{17}{24}\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)}\right\},$$

$$= -\frac{1}{8}(1) + \frac{5}{12}e^{-2t} + \frac{17}{24}e^{4t}.$$

Ejercicio80

Encontrar la transformada inversa de Laplace de $F(s) = \frac{4}{(s-1)^2(s^2+1)^2}$,

Solución

$$\frac{4}{(s-1)^2(s^2+1)^2} = \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{s-1} + \frac{Cs+D}{(s^2+1)^2} + \frac{Es+F}{s^2+1}, \qquad (6.11)$$

$$4 = \frac{A(s-1)^2(s^2+1)^2}{(s-1)^2} + \frac{B(s-1)^2(s^2+1)^2}{s-1} + \frac{(Cs+D)(s-1)^2(s^2+1)^2}{(s^2+1)^2} + \frac{(Es+F)(s-1)^2(s^2+1)^2}{s^2+1},$$

simplificando

$$4 = A(s^2+1)^2 + B(s-1)(s^2+1)^2 + (Cs+D)(s-1)^2 + (Es+F)(s-1)^2(s^2+1),$$

$$4 = A(s^2+1)^2 + B(s-1)(s^2+1)^2 + Cs(s-1)^2 + D(s-1)^2 + Es(s-1)^2 + F(s-1)^2,$$

Cuando $s = 1$

$$4 = A(1^2+1)^2 = 4A \quad \Rightarrow \quad A = 1$$

Sustituyendo sucesivamente los valores de $s = 0, -1, 2, -2, 3$ respectivamente, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -B \qquad\quad + D \qquad\quad + F &= 3, \\ -8B - 4C + 4D - 8E + 8F &= 0, \\ 25B + 2C + D + 10E + 5F &= -21, \\ -75B - 18C + 9D - 90E + 45F &= -21, \\ 200B + 12C + 4D + 120E + 40F &= -96, \end{aligned}$$

Después de resolver el sistema, encontramos

$$B = -2,\ C = 2,\ D = 0,\ E = 2 \text{ y } F = 1,$$

Sustituyendo estos valores en (6.11)

$$\frac{4}{(s-1)^2(s^2+1)^2} = \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2}{s-1} + \frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{2s+1}{s^2+1},$$

entonces

$$\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-1)^2(s^2+1)^2}\right\} = \mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} - \mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\} + \mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right\} + \mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s^2+1}\right\},$$

$$\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-1)^2(s^2+1)^2}\right\} = te^t - 2e^t + tsent + \mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+1}\right\} + \mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\},$$

$$\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-1)^2(s^2+1)^2}\right\} = (t-2)e^t + tsent + 2\cos t + sent,$$

$$\mathfrak{I}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-1)^2(s^2+1)^2}\right\} = (t-2)e^t + (t+1)sent + 2\cos t.$$

6.3 TEOREMAS Y PROPIEDADES

Teorema 6.2 Primer teorema de traslación en el eje s

i) Si $\mathfrak{I}\{f(t)\} = F(s)$ y a es cualquier número real, entonces

$$\mathfrak{I}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

ii) La forma inversa de la expresión anterior puede escribirse como

$$\mathfrak{I}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathfrak{I}^{-1}\{F(s)|_{s\to s-a}\} = e^{at} f(t)$$

Antes de enunciar el segundo teorema de traslación definiremos la función escalón unitario

DEFINICION 6.4 FUNCION ESCALON

Definimos la función escalón $u(t)$ como sigue

$$u(t)=\begin{cases}0, \ para \quad t<0\\ 1, \ para \quad t\geq 0.\end{cases} \tag{6.12}$$

Dado que la transformada de Laplace involucra solo valores de la funciona para $t \geq 0$, se observa inmediatamente que

$$\Im\{u(t)\}=\Im\{1\}=\frac{1}{s}. \tag{6.13}$$

La figura 6.1 muestra la grafica de la función escalón

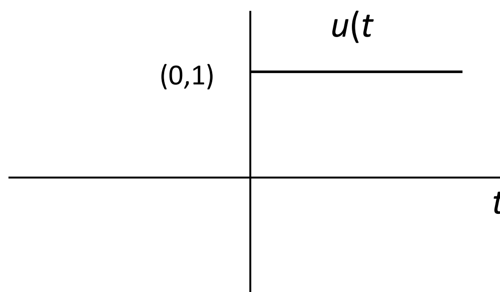


Figura 6.1 Función escalón

Teorema 6.3 Segundo teorema de traslación en el eje *t*

i) Si $\Im\{f(t)\}=F(s)$ y $a>0$, entonces

$$\Im\{f(t-a)U(t-a)\}=e^{-as}F(s)$$

ii) La forma inversa de puede escribirse como

$$\Im\{e^{-as}F(s)\}=f(t-a)U(t-a)$$

Teorema 6.4CONVOLUCION

Si $f(t)$ y $g(t)$ son continuas por trozos para $t\geq 0$ y $\Im\{f(t)\}=F(s)$, $\Im\{g(t)\}=G(s)$. Entonces,

$$\Im\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}=\Im\{f(t)\}\Im\{g(t)\}=F(s)G(s)$$

DEFINICION FUNCION PERIODICA

Sea $f(t)$ definida para toda $t>0$ y $p>0$, *f* es periódica con período *p*, si y solo si

$$f(t+p)=f(t)$$

Teorema 6.4TRANSFORMADA DE UNA FUNCION PERIODICA

Sea$f$ una función continua por trozos y periódica con periodo p. Entonces

$$\Im\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sp}}\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt$$

Ejercicio81

Demostrar que $\Im\{u(t-a)\}=\dfrac{e^{-as}}{s}$ ***donde*** $u(t-a)$ ***es la función unitaria de Heaviside.***

Solución

La figura 6.2 muestra la grafica de la función unitaria de Heaviside. Por definición tenemos

$$u(t-a)=\begin{cases}1 & t>a\\ 0 & <a\end{cases}$$

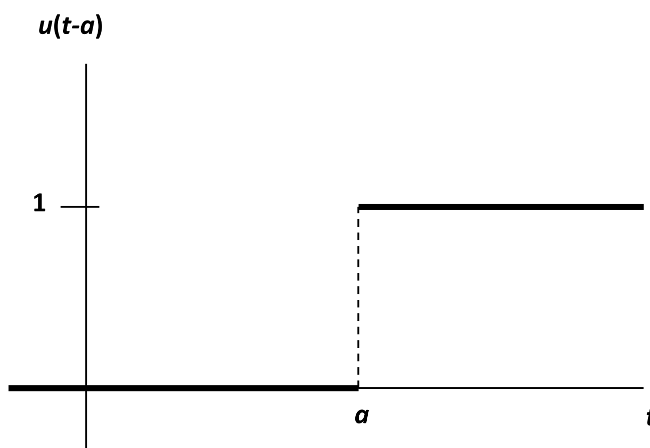


Figura 6.2. Función unitaria de Heaviside

entonces

$$\Im\{u(t-a)\}=\int_0^{a}e^{-st}(0)dt+\int_a^{\infty}e^{-st}(1)dt,$$

$$= \lim_{p\to\infty} \int_a^p e^{-st}(1)dt = \lim_{p\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_a^p,$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{e^{-as}-e^{-sp}}{s} = \frac{e^{-as}}{s}.$$

TEOREMA 6.3 EXISTENCIA DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Si la función *f* es continua por tramos para $t \geq 0$, y de orden exponencial cuando $t \to +\infty$, entonces su transformada de Laplace $F(s) = \Im\{f(t)\}$ existe. De manera más precisa, si *f* es continua por tramos y satisface

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \text{ para } t \geq T. \quad (6.14)$$

Donde *M*, *c* y *T* son constantes no negativas, entonces $F(s)$ existe para toda $s > c$.

COROLARIO 6.1

Si $f(t)$ satisface la hipótesis del teorema 5.2, entonces

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

TEOREMA 6.4 UNICIDAD DE LA TRANSFORMADA INVERSADE LAPLACE

Supóngase que las funciones $f(t)$ y $g(t)$ satisfacen la hipótesis del teorema 6.2, de tal manera que sus transformadas de Laplace $F(s)$ y $G(s)$ existan. Si $F(s) = G(s)$ para toda $s > c$ (para alguna *c*, entonces $f(t) = g(t)$ siempre que f y g sean continuas en $[0, \infty)$.

TEOREMA 6.5 UNICIDAD DE LA TRANSFORMADA INVERSADE LAPLACE

Supóngase que la funcione $f(t)$ es continua y suave por tramos para $t \geq 0$, y que es de orden exponencial cuando $t \to +\infty$ de manera que

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \text{ para } t \geq T.$$

Entonces

$$\Im\{f'(t)\} = s\Im\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0). \quad (6.15)$$

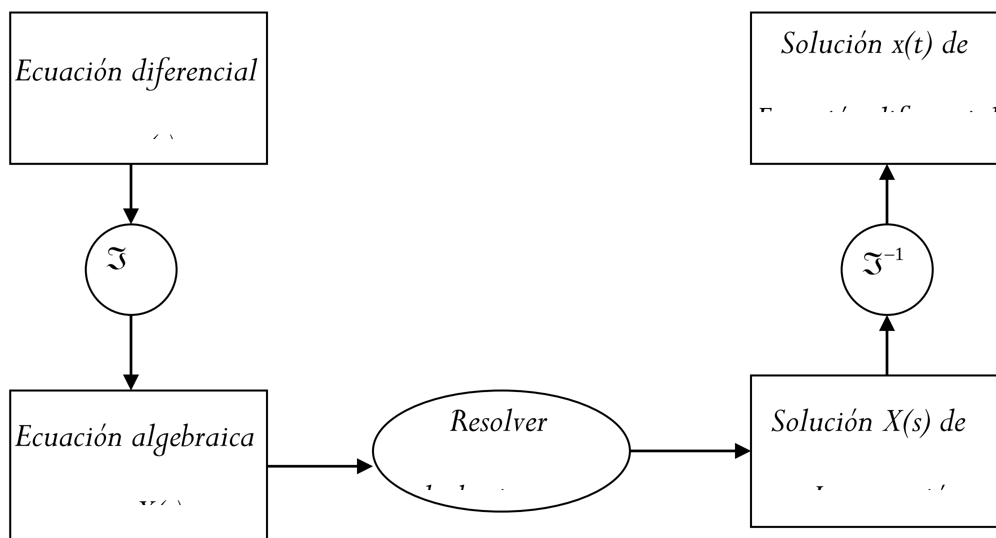
COROLARIO 6.2

Supóngase que las funciones $f, f', f'', \cdots, f^{(n)}$ son continuas y suaves por tramos para $t \geq 0$ y que cada una de estas funciones satisface (5.14). Entonces

$$\Im\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - sf^{(n-2)} - f^{(n-1)}(0). \quad (6.16)$$

6.4 SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

6.4.1 ALGORITMO DE SOLUCION



Ejercicio82

Resolver el problema con valores iniciales $x'' - x' - 6x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = -1$.

Solución

Aplicando (6.15), tenemos

$$\Im\{x'(t)\} = s\Im\{x(t)\} - x(0) = sX(s) - 2,$$

Y de (6.16)

$$\Im\{x''(t)\} = s^2\Im\{x(t)\} - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - 2s - 1,$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación diferencial original

$$\left[s^2X(s) - 2s + 1\right] - \left[sX(s) - 2\right] - 6\left[X(s)\right] = 0,$$

$$s^2X(s) - 2s + 1 - sX(s) + 2 - 6X(s) = 0,$$

$$(s^2 - s - 6)X(s) - 2s + 3 = 0,$$

Despejando $X(s)$

$$X(s)=\frac{2s-3}{s^2-s-6}=\frac{2s-3}{(s-3)(s+2)},$$

Usando el método de fracciones parciales

$$\frac{2s-3}{(s-3)(s+2)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+2},$$

Simplificando

$$2s-3=A(s+2)+B(s-3),$$

Sustituyendo $s=3$, implica

$$2(3)-3=A(3+2)+B(3-3) \quad \Rightarrow \quad 3=5A \quad \Rightarrow \quad A=\frac{3}{5},$$

Sustituyendo $s=-2$, encontramos que $B=\frac{7}{5}$

Así que

$$X(s)=\Im\{x(t)\}=\frac{3/5}{s-3}+\frac{7/5}{s+2},$$

Calculando la transformada inversa obtenemos la solución

$$\Im^{-1}\{X(s)\}=\Im^{-1}\left\{\frac{3/5}{s-3}\right\}+\Im^{-1}\left\{\frac{7/5}{s+2}\right\},$$

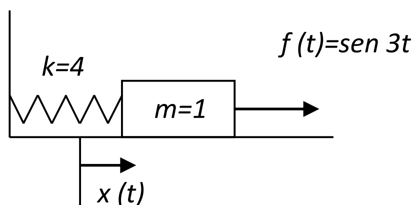
$$x(t)=\frac{3}{5}e^{3t}+\frac{7}{5}e^{-2t}.$$

6.5 APLICACIONES

Ejercicio83

Un sistema masa-resorte (ver figura) satisface la ecuación diferencial con valores iniciales $x''+4x=sen3t$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$. ***Encontrar el desplazamiento*** $x(t)$.

Solución



Por el corolario 6.2

$$\Im\{x''(t)\} = s^2\Im\{x(t)\} - sx(0) - x'(0) = s^2 X(s),$$

Y

$$\Im\{sen3t\} = \frac{3}{s^2+9},$$

Entonces

$$x'' + 4x = sen3t \Rightarrow s^2 X(s) + 4X(s) = \frac{3}{s^2+9},$$

Por tanto

$$X(s) = \frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)},$$

Aplicando fracciones parciales

$$\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+9},$$

$$3 = \frac{(As+B)(s^2+4)(s^2+9)}{s^2+4} + \frac{(Cs+D)(s^2+4)(s^2+9)}{s^2+9},$$

$$3 = (As+B)(s^2+9) + (Cs+D)(s^2+4),$$

$$3 = As^3 + 9As + Cs^3 + 4Cs + (B+D)s^2 + (9B+4D),$$

Sustituyendo $s = 0$, obtenemos $A = C = 0$ y

$$3 = (B+D)s^2 + (9B+4D),$$

$$3 = 9B + 4D,$$

$$0 = B + D,$$

Resolviendo el sistema

$$B = \frac{3}{5} \text{ y } D = -\frac{3}{5},$$

Luego

$$\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{3/5}{s^2+4} - \frac{3/5}{s^2+9},$$

$$\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{3}{10}\frac{2}{s^2+4} - \frac{1}{5}\frac{3}{s^2+9},$$

$$\Im^{-1}\left\{\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}\right\} = \frac{3}{10}\Im^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{5}\Im^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\},$$

$$x(t) = \frac{3}{10}sen2t - \frac{1}{5}sen3t.$$

Ejercicio84

Resolver el problema con valores iniciales $x'' - x' - 2x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.

Solución

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial tenemos

$$\Im\{x''\} - \Im\{x'\} - 2\Im\{x\} = 0,$$

por otro lado

$$\Im\{x''(t)\} = s^2\Im\{x(t)\} - sx(0) - x'(0) = s^2 X(s) - s,$$

$$\Im\{x'(t)\} = s\Im\{x(t)\} - x(0) = sX(s) - 1,$$

de manera que

$$s^2 X(s) - s - sX(s) + 1 - 2X(s) = 0,$$

$$(s^2 - s - 2)X(s) - s + 1 = 0,$$

despejando $X(s)$

$$X(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2},$$

y por el método de fracciones parciales

$$\frac{s-1}{s^2 - s - 2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)},$$

$$\frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1},$$

$$s - 1 = \frac{A(s-2)(s+1)}{s-2} + \frac{B(s-2)(s+1)}{s+1},$$

$$s - 1 = A(s+1) + B(s-2),$$

si $s = -1$, implica que $-1 - 1 = A(-1+1) + B(-1-2) \Rightarrow -2 = -3B \Rightarrow B = \frac{2}{3}$,

si $s = 2$, implica que $2 - 1 = A(2+1) + B(2-2) \Rightarrow 1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$,

por lo tanto
$$\frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} = \frac{\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{\frac{2}{3}}{s+1},$$

Calculando la transformada inversa obtenemos la solución

$$\Im^{-1}(X(s))=\Im^{-1}\left(\frac{\frac{1}{3}}{s-2}\right)+\Im^{-1}\left(\frac{\frac{2}{3}}{s+1}\right)=\frac{1}{3}\Im^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)+\frac{2}{3}\Im^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right),$$

$$x(t)=\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}.$$

Ejercicio85

Resolver el problema con valores iniciales $x''+4x=sen(2t)$**,** $x(0)=10$**,** $x'(0)=0$,

Solución

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación diferencial tenemos

$$\Im\{x''\}+4\Im\{x\}=\Im\{sen(2t)\},$$

pero

$$\Im\{x''(t)\}=s^2\Im\{x(t)\}-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)-10s,$$

$$\Im\{sen(2t)\}=\frac{2}{s^2+4},$$

por lo tanto

$$\Im\{x''\}+4\Im\{x\}=\Im\{sen(2t)\}\Rightarrow s^2X(s)-10s+4X(s)=\frac{2}{s^2+4},$$

$$(s^2+4)X(s)-10s=\frac{2}{s^2+4},$$

$$(s^2+4)X(s)=\frac{2}{s^2+4}+10s,$$

$$X(s)=\frac{2}{(s^2+4)^2}+\frac{10s}{s^2+4},$$

tomando la transformada inversa tenemos

$$\Im^{-1}(X(s))=\Im^{-1}\left(\frac{2}{(s^2+4)^2}\right)+\Im^{-1}\left(\frac{10s}{s^2+4}\right),$$

$$x(t)=10\cos(2t)+\frac{1}{8}(sen(2t)-2t\cos(2t)).$$

Nota: Para determinar $\Im^{-1}\left(\frac{2}{(s^2+4)^2}\right)$ utilizamos la formula

$$\mathfrak{I}^{-1}\left(\frac{2a^3}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right)=sen(at)-at\cos(at),$$

es decir,
$$\mathfrak{I}^{-1}\left(\frac{2}{\left(s^2+4\right)^2}\right)=\frac{1}{2^3}\mathfrak{I}^{-1}\left(\frac{2(2)^3}{\left(s^2+2^2\right)^2}\right)=\frac{1}{8}\left(sen(2t)-2t\cos(2t)\right).$$

GUIA DE ESTUDIO

I Usando el método matricial, resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

II. Usando la definición 6.1 encuentre la transformada de Laplace de las siguientes funciones

1. $f(t) = c$, c es una constante
2. $f(t) = t$
3. $f(t) = t^2$
4. $f(t) = e^{at}$, a es una constante
5. $f(t) = \cos \omega t$
6. $f(t) = senh(at)$
7. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ 3, & t \ge 1 \end{cases}$
8. $f(t) = \begin{cases} -1, & 0 < t < 2 \\ 0, & 2 \le t < 4 \\ 1, & t \ge 4 \end{cases}$
9. $f(t) = e^{-3t} + t^3 - 2$

III. Use la tabla de fórmulas del apéndice A para encontrar $\Im\{f(t)\}$, sí:

1. $f(t) = te^{-2t}$
2. $f(t) = e^{t}(t+3)$
3. $f(t) = 4e^{5t} - 3sen4t$
4. $f(t) = \dfrac{1}{(s-6)^{9}}$
5. $f(t) = \dfrac{s}{s^{2}+81}$
6. $f(t) = \dfrac{1}{(s-4)^{2}-25}$
7. $f(t) = \dfrac{s^{2}}{(s^{2}-16)^{2}}$
8. $f(t) = \dfrac{s^{3}}{(s^{2}+4)^{3}}$
9. $f(t) = \dfrac{s^{5}}{(s^{2}-4)^{3}}$
10. $f(t) = \dfrac{1}{s^{3}+27}$
11. $f(t) = \dfrac{1}{s^{3}-8}$
12. $f(t) = \dfrac{s^{2}}{s^{4}-16}$
13. $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{s-3}+5}$
14. $f(t) = \dfrac{\left(\sqrt{s^{2}+9}-s\right)^{2}}{\sqrt{s^{2}+9}}$
15. $f(t) = \dfrac{e^{-2\sqrt{s^{2}+9}}}{\sqrt{s^{2}+9}}$
16. $f(t) = \dfrac{e^{-3/s}}{\sqrt{s}}$
17. $f(t) = \dfrac{1-e^{-3\sqrt{s}}}{s}$
18. $f(t) = \dfrac{\ln\left[(s^{2}+36)/36\right]}{2s}$
19. $f(t) = \dfrac{\pi^{2}}{6s} + \dfrac{(\gamma + \ln s)^{2}}{s}$
20. $f(t) = \dfrac{sen\,3s\left\{\dfrac{\pi}{2} - Is(3s)\right\} + \cos 3s\; Ic(3s)}{s}$
21. $f(t) = \dfrac{senh\,sx}{s^{2}\cosh(2s)}$
22. $f(t) = \dfrac{senh\,x\sqrt{s}}{\sqrt{s}\cosh(5\sqrt{s})}$
23. $f(t) = \dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s^{2}\cosh(7\sqrt{s})}$
24. $f(t) = \dfrac{1}{3s^{2}}\tanh\left(\dfrac{3s}{2}\right)$
25. $f(t) = \dfrac{1}{s}\tanh\left(\dfrac{11s}{2}\right)$
26. $f(t) = \dfrac{5\pi}{25s^{2}+\pi^{2}}\coth\left(\dfrac{5s}{2}\right)$
27. $f(t) = \dfrac{6\pi}{(36s^{2}+\pi^{2})(1-e^{-6s})}$
28. $f(t) = \dfrac{e^{-3s}(1-e^{-\varepsilon s})}{s}$
29. $f(t) = \dfrac{6\pi(1+e^{-6s})}{s(1-re^{-s})}$

IV. En los siguientes ejercicios, encuentre la transformada inversa de Laplace

1. $F(s)=\dfrac{1}{s^2}$ **Respuesta** $f(t)=t$

2. $F(s)=\dfrac{2}{s^3}$ **Respuesta** $f(t)=t^2$

3. $F(s)=\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s+1}$ **Respuesta** $f(t)=t-e^{-t}$

4. $F(s)=\dfrac{(s+2)^2}{s^3}$ **Respuesta** $f(t)=1+4t+2t^2$

5. $F(s)=\dfrac{(s-1)^3}{s^4}$ **Respuesta** $f(t)=1-3t+\dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{1}{6}t^3$

6. $F(s)=\dfrac{1}{s^3}+\dfrac{6}{s}+\dfrac{1}{s+9}$ **Respuesta** $f(t)=6+\dfrac{1}{2}t^2+e^{-9t}$

7. $F(s)=\dfrac{1}{2s-1}+\dfrac{3}{s^2}$ **Respuesta** $f(t)=\dfrac{1}{2}e^{t/2}+3t$

8. $F(s)=\dfrac{1}{4s-1}+\dfrac{1}{4(s-1)}$ **Respuesta** $f(t)=\dfrac{1}{4}e^{t/4}+\dfrac{1}{4}e^{t}$

9. $F(s)=\dfrac{s}{6s^2+4}$ **Respuesta** $f(t)=\dfrac{1}{6}\cos\dfrac{2}{\sqrt{6}}t$

10. $F(s)=\dfrac{s+4}{s^2+3}$ **Respuesta** $f(t)=\cos\sqrt{3}\,t+4\dfrac{\sqrt{3}}{3}sen\sqrt{3}\,t$

11. $F(s)=\dfrac{7s-4}{s^2+9}$ **Respuesta** $f(t)=7\cos 3t-\dfrac{4}{3}sen 3t$

12. $F(s)=\dfrac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}$ **Respuesta** $f(t)=-\dfrac{16}{5}e^{t}+\dfrac{25}{6}e^{2t}+\dfrac{1}{30}e^{-4t}$

13. $F(s)=\dfrac{2s-4}{(s^2+s)(s^2+1)}$ **Respuesta** $f(t)=-4+3e^{-t}+\cos t+3sen\,t$

V. Usando la transformada de Laplace, resolver las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $y'' - 2y' - 3y = 4,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$ — ***Respuesta*** $y = -4/3 + 2e^{-t} + 1/3(e^{3t})$

2. $y'' - 2y' - 3y = e^{t},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4$ — ***Respuesta*** $y = -1/4(e^{t}) + 13/8(e^{3t}) + 5/8(e^{-t})$

3. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ — ***Respuesta*** $y = e^{t}\,sen\,t$

4. $y'' + 4y' + 5y = 1,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ — ***Resp.*** $y = 1/5 + 2e^{-2t}\left[-1/10(\cos t) + 1/5(sent)\right]$

5. $y'' + 2y' + 2y = 2\cos 2t - sen 2t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ — ***Respuesta*** $y = 1/2\,(sen\,2t) - e^{-t}sent$

6. $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = -12,\ y''(0) = 34$ — ***Respuesta*** $y = e^{-2t}(t-2)^{2}$

7. $y'' + y = t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ — ***Respuesta*** $y = t - sen\,t$

8. $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$ — ***Respuesta*** $y = e^{3t}(-t+1)$

9. $y'' + y = 2\cos t,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$ — ***Respuesta*** $y = 2\cos t + tsen\,t$

10. $y'' + y = 2(\cos t + sent),\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1$ — ***Respuesta*** $y = t(sent - \cos t)$

V. Integración de la transformada

Si $f(t)$ satisface las condiciones del teorema de existencia y $\lim_{t \to 0^{+}}\{f(t)/t\}$ existe, y además $f(t) = \Im\{f(t)\}$, entonces

$$\Im\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_{s}^{\infty} F(\sigma)\,d\sigma$$

Usando este resultado determine

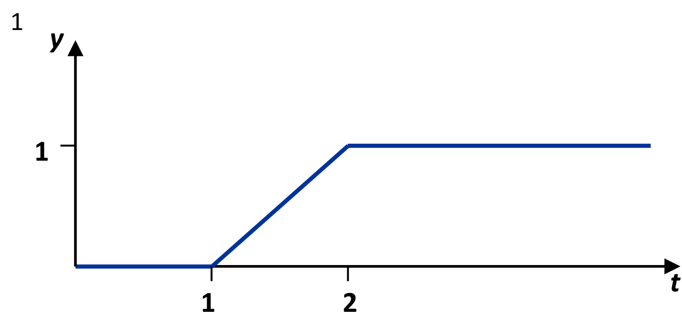
1. $\Im\{sen 3t/t\}$ — ***Respuesta*** $\pi/2 - \tan^{-1}(s/3)$
2. $\Im\{senh\,t/t\}$ — ***Respuesta*** $1/2\ln(s+1)/(s-1)$
3. $\Im\{(e^{-at} - e^{-bt})/t\}$ — ***Respuesta*** $1/2\ln(s+b)/(s+a)$
4. $\Im\{(\cos at - \cos bt)/t\}$ — ***Respuesta*** $1/2\ln(s^{2}+b^{2})/(s^{2}+a^{2})$

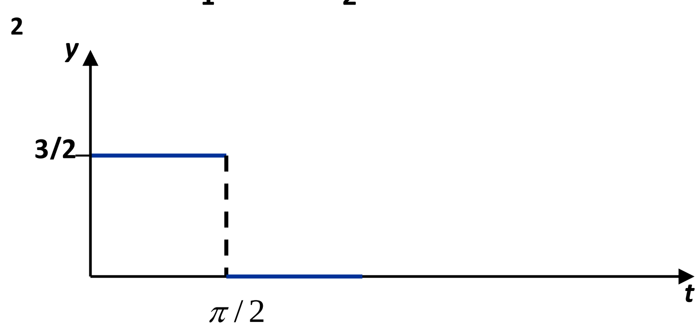
a) Demuestre que

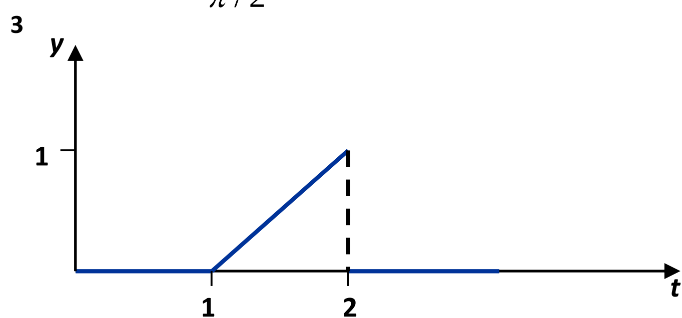
$$\int_{0}^{\infty}\left(e^{-3t} - e^{-6t}\right)/t\ dt = \ln 2$$

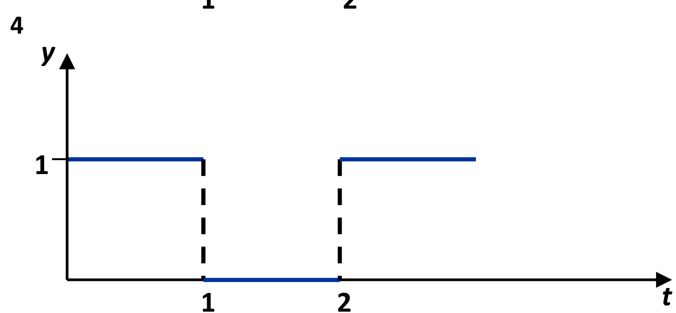
$$\Im\{sen 4t/t\} = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{4}$$

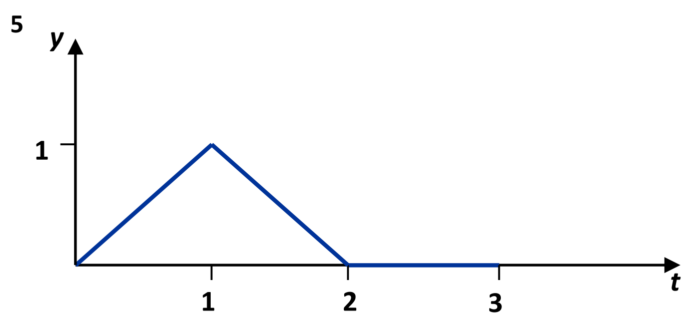
VII. Expresar las siguientes funciones en términos de la función escalón y encontrar su transformada.


1
y
1
t
1
2


2
y
3/2
t
$\pi/2$


3
y
1
t
1
2


4
y
1
t
1
2


5
y
1
t
1
2
3

BIBLIOGRAFIA

[1] Dennis G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*, (Thomson, 8ª Ed. 2006).

[2] Boyce-Diprima, *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores a la Frontera*, (Limusa, 5ª Ed. 2010).

[3] Campbell- Heberman, *Introducción a las Ecuaciones Diferenciales con Problemas de Valor de Frontera*, (Mc Graw Hill, 1999)

[4] Edwin Kreyszing, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería*, Vol. 1 (Limusa, 7ª Ed.).

[5] Ignacio A., Mariló López, *Ecuaciones Diferenciales: Teoría y Problemas*, (Alfaomega 1ª Ed. 1999).

[6] Martin Golubitsky, Michel Dellnitz, *Algebra lineal y Ecuaciones Diferenciales con uso de Matlab*, (Internacional Thomson, 2001).

[7] Murria R. Spiegel, *Transformadas de Laplace*, (McGraw-Hill, 1ª Ed 1991)

APENDICE

TABLAS DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE[7]